TROIS PETITS PAPIERS EN QUÊTE D'AUTEUR

Papier n°1 : modélisation de l'évolution d'une épidémie

Version provisoire

Marc CHRISTINE (*)

(Luigi PIRANDELLO[1])

(*) Insee, Direction de la méthodologie et de la coordination statistique et internationale

mchristine7577@gmail.com

Mots-clés : taux de contamination, Covid, récurrence, chaîne de MARKOV

Domaine concerné : modélisation, impact de la Covid

Résumé

La pandémie de Covid-19 a frappé le monde et la France en particulier depuis le début de l'année 2020 avec des évolutions temporelles très marquées (identification de plusieurs « vagues » de contaminations entrecoupées de périodes de régression).

Sur un sujet d'une actualité virulente et qui donne déjà lieu à de multiples analyses et simulations, ce papier a pour but de construire deux modèles simples *en temps discret* traduisant la propagation d'une épidémie contagieuse.

<u>Modèle déterministe</u>

Il repose sur deux paramètres :

- le *taux de contamination* ρ entre deux instants (par exemple : jours)
- le *délai de guérison k* d'une personne infectée

La population de référence est supposée infinie : il y a toujours des individus à contaminer. Deux individus malades différents contaminent nécessairement des individus différents.

[1] Ce papier a été présenté aux JMS2022 sous le pseudonyme de Luigi PIRANDELLO.

On peut alors décrire les évolutions au cours du temps (discrétisé) des effectifs suivants :

C_n : nombre de contaminés à l'instant *n* (plus précisément au cours de l'intervalle de temps $]n-1,n]$

M_n : nombre total de malades à l'instant *n*.

Si l'on suppose *ρ* et *k* constants (ce qui est peut être vérifié sur une période limitée donnée), on peut obtenir une formule générale décrivant la dépendance de ces effectifs nombres en fonction de *n*, partant d'une condition initiale donnée.

Inversement, la donnée d'observations relatives au nombre de malades journaliers et au nombre de *nouvelles* contaminations permettrait d'estimer ces paramètres.

On pourrait bien sûr compliquer le modèle en supposant qu'une proportion α de nouveaux contaminés meurent au bout de *m* jours (*m < k)*.

La difficulté relative à l'utilisation de ces modèles, soit à des fins d'estimation, soit à celles de projections, est que les paramètres considérés *varient au cours du temps*, comme l'observation de la cyclicité de la pandémie et les actions destinées à la contrecarrer l'ont montré.

Modélisation stochastique

Une proposition de modélisation de l'évolution de manière stochastique est indiquée, à l'aide de chaînes de MARKOV, en s'inspirant du « problème des lampes ».

Short abstracts in English and French

This paper offers a simple modeling, in discreet time, of the evolution of a disease. It is based on two parameters:

- the rate of contamination *ρ* between two moments (for example: days)
- the healing time *k* of an infected person.

The paper establishes the equations giving the number of new infected and sick at any time *n* and highlights the modalities of evolution of these quantities. Some perspective for stochastic modeling using MARKOV chains is also given.

Ce papier propose une modélisation simple, en temps discret, de l'évolution d'une maladie. Il repose sur deux paramètres :

- le taux de contamination *ρ* entre deux instants (par exemple : jours)
- le délai de guérison *k* d'une personne infectée.

Le papier établit les équations donnant le nombre de nouveaux contaminés et de malades à tout instant *n* et met en évidence les modalités d'évolution de ces grandeurs. Quelques pistes pour une modélisation stochastique au moyen de chaînes de MARKOV sont également données.

Ce papier a pour but de proposer un modèle déterministe très simple en temps discret simulant la propagation d'une épidémie contagieuse. Il repose sur deux paramètres :

- le *taux de contamination* ρ entre deux instants (par exemple jours) : un individu malade et contagieux contamine en moyenne ρ autres personnes entre deux instants consécutifs
- le *délai de guérison* k d'une personne infectée, au bout duquel elle n'est plus malade ni contagieuse (on suppose cependant qu'elle peut être recontaminée ultérieurement).

La principale conclusion est que, pour que l'épidémie s'éteigne, il est nécessaire et suffisant que : $\boldsymbol{\rho} < \frac{1}{\boldsymbol{k}}$. Cette condition est compatible avec le $\boldsymbol{\rho} < 1$ que l'on entend habituellement (et compatible avec cette dernière), si l'on admet qu'une personne infectée peut contaminer au plus 1/*k* personne au cours de chacun des $\boldsymbol{k}$ jours.

---

1. Modélisation déterministe

Une maladie contagieuse se transmet d'un individu à un ou plusieurs autres entre deux instants consécutifs. On fait les hypothèses suivantes sur la propagation :

- Un individu contaminé à l'instant t (c'est-à-dire qui contracte la maladie à cet instant) est malade pendant k périodes, c'est-à-dire aux instants t, t+1, …, t+k (on suppose $k \geq 2$). Il peut avoir été contaminé antérieurement mais on ne tient pas compte de ce fait.
- Un tel individu peut en contaminer d'autres au cours des intervalles de temps]t, t+1], …,]t+k-1, t+k] mais il guérit après l'instant t+k et n'est pas contaminant sur l'intervalle]t+k, t+k+1]. Il peut être recontaminé ultérieurement, dès l'instant t+k+1, mais on ne tient pas compte de ce fait.
- Un individu contaminant sur l'intervalle]u, u+1] contamine en moyenne ρ autres individus. On considèrera ρ comme un réel > 0.
- La population de référence est supposée infinie : il y a toujours des individus à contaminer. Deux individus malades différents contaminent nécessairement des individus différents

Pour résumer :

Contaminé sur]*t*-1, *t*] → malade jusque *t*+*k* → contaminant sur]*t*, *t*+*k*]
et non contaminant sur]*t*+*k*, *t*+*k*+1].

Ainsi, par corollaire, un malade à l'instant n peut avoir été contaminé sur l'intervalle de temps]n-k-1, n] mais pas sur l'intervalle]n-k-2, n-k-1], **c'est-à-dire au plus tôt sur l'intervalle]*n*-*k*-1, *n*-*k*].**

Pour $n \geq 1$, on note :

C_n le nombre de contaminés à l'instant n (plus précisément au cours de l'intervalle]n-1, n])
M_n le nombre total de malades à l'instant n.

On suppose : $C_0 = M_0 = 1$.

On peut donc dresser le tableau suivant :

n	C_n	M_n	Observations
0	1	1	
1	ρ	$1+\rho$	
2	$\rho\,(1+\rho)$	$1+\rho+\rho\,(1+\rho)$ $=(1+\rho)^2$	
3	$\rho\,(1+\rho)^2$	$(1+\rho)^2+\rho\,(1+\rho)^2$ $=(1+\rho)^3$	
…			
k	$\rho\,(1+\rho)^{k-1}$	$(1+\rho)^k$	
$k+1$	$\rho\,[(1+\rho)^k-1]$	$(1+\rho)^k-1$ $+\rho[(1+\rho)^k-1]$ $=$ $(1+\rho)\,[(1+\rho)^k-1]$	L'individu malade à l'instant 0 est guéri après l'instant *k* et n'est plus contaminant sur]*k*, *k*+1] ni malade en k+1.
$k+2$	$\rho\{(1+\rho)\,[(1+\rho)^k-1]$ $-\rho\}$		Les ρ individus contaminés sur]0, 1] ne sont plus contaminants sur]*k*+1, *k*+2] et sont exclus des malades contagieux pour le calcul du nombre de contaminés sur]*k*+1, *k*+2].
…			
n			

► On obtient les équations de récurrence suivantes :

Pour 1 ≤ n ≤ k :

$$\boldsymbol{M_n = (1+\rho)^n}$$
$$\boldsymbol{C_n = \rho(1+\rho)^{n-1}} \quad \textbf{(0)}$$

Pour n ≥ k : $\boldsymbol{M_n = C_n + C_{n-1} + \cdots C_{n-k} = \sum_{j=0}^{k} C_{n-j}}$ **(1)**

$$\boldsymbol{C_{n+1} = \rho\,(M_n - C_{n-k})} \quad \textbf{(2)}$$

<u>Autres relations de récurrence</u>

- La relation **(1)** entraîne :

$$M_{n+1} = \sum_{j=0}^{k} C_{n+1-j} = C_{n+1} + \sum_{j=1}^{k} C_{n+1-j} = C_{n+1} + \sum_{j=0}^{k-1} C_{n-j} = C_{n+1} + \sum_{j=0}^{k} C_{n-j} - C_{n-k},$$

soit :

$$\boldsymbol{M_{n+1} - M_n = C_{n+1} - C_{n-k}}. \text{ (3)}$$

- D'après **(2)**, on en déduit alors :

$$\boldsymbol{M_{n+1}} = \boldsymbol{C_{n+1}} + \boldsymbol{M_n} - \boldsymbol{C_{n-k}} = \boldsymbol{\rho}\,(\boldsymbol{M_n} - \boldsymbol{C_{n-k}}) + \boldsymbol{M_n} - \boldsymbol{C_{n-k}} = (1+\boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{M_n} - \boldsymbol{C_{n-k}}). \text{ (4)}$$

- On en déduit :

$$C_{n-k} = M_n - \frac{M_{n+1}}{1+\rho}, \text{ ou : } \boldsymbol{C_j} = \boldsymbol{M_{j+k}} - \frac{\boldsymbol{M_{j+k+1}}}{1+\boldsymbol{\rho}}, \textbf{ pour } \boldsymbol{j} \geq 0 \text{ [en posant } j = n-k].$$

L'équation **(1)** donne alors :

$$M_n = \sum_{j=0}^{k} C_{n-j} = \sum_{q=n-k}^{n} C_q = \sum_{q=n-k}^{n} (M_{q+k} - \frac{M_{q+k+1}}{1+\rho})$$
$$= \frac{1}{1+\rho} \sum_{q=n-k}^{n} (M_{q+k} - M_{q+k+1}) + \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{q=n-k}^{n} M_{q+k}$$
$$= \frac{1}{1+\rho}(M_n - M_{n+k+1}) + \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{q=n-k}^{n} M_{q+k}.$$

On en déduit :

$$\frac{\rho}{1+\rho} M_n = -\frac{M_{n+k+1}}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{q=n-k}^{n} M_{q+k} = -\frac{M_{n+k+1}}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{j=n}^{n+k} M_j,$$

soit :

$$M_{n+k+1} = \rho \sum_{j=n}^{n+k} M_j.$$

(5)

<u>Étude de l'évolution des C_n</u>

L'équation **(2)** donne, **pour $\boldsymbol{n \geq k}$** : $\boldsymbol{M_n = C_{n-k} + \frac{C_{n+1}}{\rho}}$.
En reportant dans l'équation **(1)**, on obtient :

$$\boldsymbol{C_{n-k} + \frac{C_{n+1}}{\rho} = C_n + C_{n-1} + \cdots C_{n-k} = \sum_{j=0}^{k} C_{n-j}}$$

soit :

$$\boldsymbol{C_{n+1} = \rho\,(C_n + C_{n-1} + \cdots C_{n-k+1}) = \rho \sum_{j=0}^{k-1} C_{n-j}}\,.$$

(6)

On obtient une équation de récurrence linéaire d'ordre *k*, qui a la même structure que l'équation **(5)**.

Des solutions particulières sont de la forme λ^n, où λ vérifie la relation :

$$\boldsymbol{\lambda^{n+1} = \rho \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{n-j}},$$

soit (en multipliant par λ^{k-1}) :

$$\boldsymbol{\lambda^k = \rho \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j} = \rho \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j}.$$

λ est donc racine du polynôme

$$\boldsymbol{P(X) = X^k - \rho \sum_{j=0}^{k-1} X^j}.$$

1ère remarque

1 est racine de P si et seulement si : $1 - k\rho = 0$, soit : $\boldsymbol{\rho = \frac{1}{k}}$.

Étude, à titre d'exemple, du cas $k = 2$

On a alors : $P(X) = X^2 - \rho X - \rho$.

Le polynôme P possède deux racines réelles distinctes et de signes opposés :

$$\lambda = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\rho}}{2}.$$

L'équation de récurrence **(6)** admet pour solution générale, **pour *n* ≥ 2** :

$$\boldsymbol{C_n = a\, \lambda_1^n + b\, \lambda_2^n}.$$

Le comportement de C_n est déterminé par la position des valeurs absolues des racines de P par rapport à 1 :

- Si celles-ci sont < 1, la suite $\{C_n\}$ tend vers 0
- Si l'une d'entre elles est > 1, la suite $\{C_n\}$ tend vers + ∞
- Si l'une vaut 1 (soit si $\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$), cela dépend de la valeur de l'autre. Comme le produit des racines vaut $-\rho$, l'autre racine vaut aussi $-\rho = -\frac{1}{2}$ et la suite $\{C_n\}$ tend vers une constante.

Étude des racines

La racine < 0, $\lambda_1 = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\rho}}{2}$, est > - 1 si et seulement si : $\sqrt{\rho^2 + 4\rho} < 2 + \rho$, soit :

$$\rho^2 + 4\rho < (2 + \rho)^2, \text{ toujours vrai. Donc : } |\boldsymbol{\lambda}_1| < 1.$$

La racine > 0, $\lambda_2 = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\rho}}{2}$, est < 1 si et seulement : $\sqrt{\rho^2 + 4\rho} < 2 - \rho$, ce qui implique $2 - \rho > 0$, et équivaut alors à : $\rho^2 + 4\rho < (2 - \rho)^2$, soit, après calculs, à :$\rho < \frac{1}{2}$.

► En définitive : **la racine < 0 est < 1 en valeur absolue et la racine > 0 l'est si et seulement si** $\boldsymbol{\rho < \frac{1}{2}}$**.**

L'évolution du nombre de contaminés $\boldsymbol{C_n}$ **est donc explosive si** $\boldsymbol{\rho > \frac{1}{2}}$**, tend à devenir stationnaire (tend vers *b*) si** $\boldsymbol{\rho = \frac{1}{2}}$ **et tend à s'évanouir si** $\boldsymbol{\rho < \frac{1}{2}}$**.**

Expression exacte de C_n

On détermine *a* et *b* à partir des valeurs initiales. On constate que la relation de récurrence, démontrée pour $n \geq 2$, est encore valable pour $n = 1$, soit : $C_2 = \rho(C_1 + C_0)$. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} C_1 = a\,\lambda_1 + b\,\lambda_2 \\ C_2 = a\,\lambda_1^2 + b\,\lambda_2^2 \end{cases} \quad .$$

On obtient un système linéaire de deux équations, de déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) = -\rho\sqrt{\rho^2 + 4\rho}.$$

On obtient alors :

$$\Delta\, a = \begin{vmatrix} C_1 & \lambda_2 \\ C_2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix}, \text{ d'où : } \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{C_1\lambda_2^2 - C_2\lambda_2}}{\boldsymbol{\Delta}} \text{ et : } \Delta\, b = \begin{vmatrix} \lambda_1 & C_1 \\ \lambda_1^2 & C_2 \end{vmatrix}, \text{ d'où : } \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{C_2\lambda_1 - C_1\lambda_1^2}}{\boldsymbol{\Delta}}.$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\rho^2 + 4\rho - \rho\sqrt{\rho^2 + 4\rho}}}{\boldsymbol{2(\rho^2 + 4\rho)}} = \frac{1 - \dfrac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\sqrt{\rho^2 + 4\rho}}}}{2}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{\rho^2 + 4\rho + \rho\sqrt{\rho^2 + 4\rho}}}{\boldsymbol{2(\rho^2 + 4\rho)}} = \frac{1 + \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 4\rho}}}{2}.$$

Cas particulier : $\boldsymbol{\rho = \frac{1}{2}}$

On a alors : $\rho^2 + 4\rho = \frac{9}{4}$, d'où (tous calculs faits) : $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$.

Expression exacte de M_n

Pour *n* ≥ 2 :

$$M_n = C_{n-2} + \frac{C_{n+1}}{\rho} = a\,\lambda_1^{n-2} + b\,\lambda_2^{n-2} + \frac{a\,\lambda_1^{n+1} + b\,\lambda_2^{n+1}}{\rho}$$

$$= a\,\lambda_1^n\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_1}{\rho}\right) + b\,\lambda_2^n\left(\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_2}{\rho}\right).$$

Le comportement de M_n est régi par les mêmes conditions sur ρ que celui de C_n.

Étude du cas général

Pour X ≠ 1, on a :

$$P(X) = X^k - \rho\sum_{j=0}^{k-1} X^j = X^k - \rho\frac{X^k - 1}{X - 1} \qquad .$$

Les racines de P sont donc, avec les mêmes ordres de multiplicité (sauf éventuellement pour la racine 1), celles de

$$Q(X) = (X-1)P(X) = X^k(X-1) - \rho\left(X^k - 1\right) = X^{k+1} - (1+\rho)X^k + \rho.$$

Étude des racines de Q.

a. Existence de racines doubles

Une racine double de Q est en même temps racine de Q'. Or :

$$\begin{aligned} Q'(X) &= (k+1)\,X^k - k(1+\rho)X^{k-1} \\ &= X^{k-1}\,[(k+1)X - k(1+\rho) \end{aligned} \qquad .$$

Les deux racines de Q' sont 0 (qui n'est pas racine de Q) et $\alpha = \frac{k(1+\rho)}{k+1}$. Il y a donc au plus une racine double, α, et celle-ci ne l'est effectivement que si : $Q(\alpha) = 0$, soit : $\alpha^{k+1} - (1+\rho)\alpha^k + \rho = 0$, soit :

$$\frac{k^{k+1}(1+\rho)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} - (1+\rho)\frac{k^k(1+\rho)^k}{(k+1)^k} + \rho = 0, \text{ soit :}$$

$$\frac{k^k(1+\rho)^{k+1}}{(k+1)^k}\left(\frac{k}{k+1} - 1\right) + \rho = 0,$$

$$\text{soit : } \frac{\rho}{(1+\rho)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}.$$

→ Étudions si cette équation possède des solutions.

On considère la fonction $x > 0 \to f(x) = \frac{x}{(1+x)^{k+1}} > 0$.
On a : $ln\, f(x) = ln\, x - (k+1)\, ln(1+x)$,
d'où : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{k+1}{1+x}$.

On a donc : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{k}$. La fonction f est donc croissante sur $]0, \frac{1}{k}[$ et décroissante sur

$\left]\frac{1}{k}, +\infty\right[$. Elle admet donc un maximum en $x = \frac{1}{k}$, qui vaut $\frac{\frac{1}{k}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$.

► Il existe donc une seule valeur de ρ pour laquelle Q possède une racine double : $\rho = \frac{1}{k}$, et cette valeur correspond au cas où 1 est racine de P et, par construction, racine double de Q.

P ne possède donc jamais de racine double.

b. Étude des modules des racines (réelles ou complexes) de P

Le produit des racines de P vaut $(-1)^k(-\rho) = (-1)^{k+1}\rho$. On voit donc que si tous ces modules sont ≤ 1, alors : $\rho \leq 1$. Par contraposition, **si $\boldsymbol{\rho} > 1$, alors il existe au moins une racine de module > 1.**

Notons alors $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les racines de P avec $|\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_k| = M$.

D'après la définition de P, on a :

$$P(\lambda_k) = \lambda_k^k - \rho\, \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_k^j = 0, \text{ d'où : } \left|\lambda_k^k\right| = \rho\left|\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_k^j\right| \leq \rho \sum_{j=0}^{k-1} \left|\lambda_k^j\right|,$$

soit :

$$M^k \leq \rho \sum_{j=0}^{k-1} M^j.$$

- Si $M = 1$, on obtient : $1 \leq \rho \sum_{j=0}^{k-1} 1 = k\rho$, soit : $\rho \geq \frac{1}{k}$. Par corollaire : **si $\boldsymbol{\rho} < \frac{1}{k}$, alors : $\boldsymbol{M} \neq 1$.**

- Si $M \neq 1$, on obtient :

  $M^k \leq \rho \frac{M^k - 1}{M-1}$, soit : $\begin{cases} M^k(M-1) \leq \rho\,(M^k - 1) \; si \; M > 1 \\ M^k(M-1) \geq \rho\,(M^k - 1) \; si \; M < 1 \end{cases}$,

  soit :

  $$\begin{cases} Q(\boldsymbol{M}) \leq 0 \; si \; M > 1 \\ Q(\boldsymbol{M}) \geq 0 \; si \; M < 1 \end{cases}.$$

→ On va étudier le signe de la fonction Q appliquée à une variable réelle et, pour cela, étudier les variations de la fonction : $x \in R \to Q(x)$. On a vu que :

$$\boldsymbol{Q'(x) = x^{k-1}} \qquad [(\boldsymbol{k}+1)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}(1+\boldsymbol{\rho})].$$

Donc :

- **Si $\boldsymbol{k} - 1$ est pair** (d'où : $k \geq 3$), alors : $x^{k-1} \geq 0$ et : $Q'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \alpha = \frac{k(1+\rho)}{k+1}$.

  La fonction Q est donc décroissante sur $]-\infty, \alpha[$ et croissante sur $]\alpha, +\infty[$, avec un minimum en α de valeur $\boldsymbol{Q(\alpha) = \alpha^{k+1} - (1+\rho)\alpha^k + \rho}$.
  On note, d'après les calculs du § a) que :

$$Q(\boldsymbol{\alpha}) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{\rho}}{(1+\boldsymbol{\rho})^{\mathbf{k+1}}} \geq \frac{\mathbf{k}^{\mathbf{k}}}{(\mathbf{k}+1)^{\mathbf{k+1}}}$$

et cette condition n'est réalisée (avec égalité) que si $\rho = \frac{1}{k}$, auquel cas $\alpha = 1$, racine double et unique racine réelle de Q.

Si cette condition n'est pas réalisée, on a : $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\alpha}) < 0$ et, comme la fonction Q admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$, on en déduit qu'elle s'annule deux fois, en deux racines réelles μ et 1, situées de part et d'autre de α, et qu'elle est négative entre ses deux zéros.

On note que : $\alpha < 1 \Leftrightarrow \rho < \frac{1}{k}$. Et : $Q(0) = \rho > 0$, donc 0 est extérieur à l'intervalle des racines.

Par conséquent : $\begin{cases} \rho < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 < \mu < \alpha < 1 \\ \qquad\qquad\qquad \rho > \frac{1}{k} \Rightarrow 1 < \alpha < \mu \Rightarrow M > 1 \end{cases}$.

- **Si $\boldsymbol{k}-1$ est impair**, alors : $x^{k-1} \leq 0$ pour $x \leq 0$. Donc :

$$Q'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \; et \; x \geq \alpha = \frac{k(1+\rho)}{k+1} \\ \qquad ou \\ x \leq 0 \; et \; x \leq \alpha = \frac{k(1+\rho)}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \alpha \\ ou \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

La fonction Q est donc croissante sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $[0, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Elle admet un maximum relatif en 0, de valeur $\rho > 0$, et un minimum relatif en α de valeur $Q(\alpha) = \alpha^{k+1} - (1+\rho)\alpha^k + \rho$. Elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.

Elle admet donc trois racines réelles : une négative et deux strictement positives (dont la valeur 1 et une autre μ) de part et d'autre de α, éventuellement confondues dans le cas $\rho = \frac{1}{k}$. La fonction Q est négative sur $\mathbb{R}^-$ et sur l'intervalle limité par ses deux racines positives.

On a la même conclusion que dans le cas précédent :

$$\boldsymbol{\rho} > \frac{1}{\boldsymbol{k}} \Rightarrow 1 < \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\mu} \Rightarrow \boldsymbol{M} > 1.$$

→ **En résumé, pour $\boldsymbol{\rho} \neq \frac{1}{\boldsymbol{k}}$:**

- **Si $\boldsymbol{\rho} < \frac{1}{\boldsymbol{k}}$: $\mathbf{M} \neq 1$ (C1)**
- **$\boldsymbol{\rho} > \frac{1}{\boldsymbol{k}} \Rightarrow \boldsymbol{M} > 1$. (C2)**
- **Si $\boldsymbol{M} > 1$, alors $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M}) \leq 0$.**
  - **Si $\boldsymbol{\rho} < \frac{1}{\boldsymbol{k}}$: $\boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{M} \leq 1$, impossible**
  - **Si $\boldsymbol{\rho} > \frac{1}{\boldsymbol{k}}$: $1 \leq \boldsymbol{M} \leq \boldsymbol{\mu}$.**

- **Si $\boldsymbol{M} < 1$, alors $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M}) \geq 0$.**

- Si $\boldsymbol{\rho} < \frac{1}{k}$: $\boldsymbol{M} \leq \boldsymbol{\mu}$ ***ou*** $\boldsymbol{M} \geq 1$, **ce qui se réduit à** $\boldsymbol{M} \leq \boldsymbol{\mu}$**. (C3)**
- Si $\boldsymbol{\rho} > \frac{1}{k}$: $\boldsymbol{M} \leq 1$ ***ou*** $\boldsymbol{M} \geq \boldsymbol{\mu} > 1$, **non informatif.**

Donc :

$$\boldsymbol{M} > 1 \Rightarrow \boldsymbol{\rho} \geq \frac{1}{\boldsymbol{k}} \qquad \text{, soit : } \boldsymbol{\rho} < \frac{1}{\boldsymbol{k}} \Rightarrow \boldsymbol{M} \leq 1.$$

Mais d'après (C1), on a nécessairement : $\boldsymbol{M} < 1$ **et d'après (C3), on a l'inégalité plus précise :** $\boldsymbol{M} \leq \boldsymbol{\mu} < 1$**. La condition (C2) établit quant à elle la réciproque.**

On a donc : $\boldsymbol{\rho} > \frac{1}{\boldsymbol{k}} \Leftrightarrow \boldsymbol{M} > 1$ ***ou*** $\boldsymbol{\rho} < \frac{1}{\boldsymbol{k}} \Leftrightarrow \boldsymbol{M} < 1.$

<u>Étude du cas particulier</u> $\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\boldsymbol{k}}$**.**

On sait alors que 1 est racine de P, donc : $\boldsymbol{M} \geq 1$. Si $\boldsymbol{M} \geq 1$, on a : $Q(M) \leq 0$, ce qui ne peut se produire qu'en $\boldsymbol{M} = 1$ d'après l'étude des variations de la fonction Q.

→ On va chercher s'il existe des racines complexes de P de module 1 autres que 1.

Soit $e^{i\theta}$ une telle racine, $\neq 1$. On a alors :

$$0 = P(e^{i\theta}) = (e^{i\theta})^k - \frac{1}{k}\frac{1-(e^{i\theta})^k}{1-e^{i\theta}} = e^{ik\theta} - \frac{1}{k}\frac{e^{\frac{ik\theta}{2}} \sin\frac{k\theta}{2}}{e^{\frac{i\theta}{2}} \sin\frac{\theta}{2}},$$

d'où : $\boldsymbol{e}^{\frac{i(k+1)\theta}{2}} = \frac{1}{\boldsymbol{k}} \frac{\sin\frac{k\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

- En prenant les parties imaginaires de cette égalité, on obtient : $\sin\frac{(k+1)\theta}{2} = 0$, soit : $\boldsymbol{\theta} = \frac{2q\pi}{k+1}$, avec $q \in \mathbb{Z}$. On a alors : $\frac{k\theta}{2} = \frac{kq\pi}{k+1}$ et : $\frac{(k+1)\theta}{2} = q\pi$.

- En prenant les parties réelles, on obtient donc :

$$\cos\frac{(k+1)\theta}{2} = \frac{1}{k}\frac{\sin\frac{k\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}, \text{ soit : } \cos q\pi = \frac{1}{k}\frac{\sin\frac{kq\pi}{k+1}}{\sin\frac{q\pi}{k+1}}.$$

En notant que : $\frac{kq\pi}{k+1} = \frac{(k+1)q\pi}{k+1} - \frac{q\pi}{k+1} = q\pi - \frac{q\pi}{k+1}$, on obtient :

$$\cos q\pi = (-1)^q = \frac{1}{k}\frac{\sin\left(q\pi - \frac{q\pi}{k+1}\right)}{\sin\frac{q\pi}{k+1}} = \frac{1}{k}\frac{-\sin\left(\frac{q\pi}{k+1}\right)\cos q\pi}{\sin\frac{q\pi}{k+1}} = \frac{1}{k}[-(-1)^q] = \frac{(-1)^{q+1}}{k}.$$

Ces calculs ne sont licites que si $\sin\frac{q\pi}{k+1} \neq 0$ mais l'égalité obtenue ci-dessus est alors impossible.

Et, si $\sin\frac{q\pi}{k+1} = 0$, cela implique que *q* est multiple de $k+1$, d'où : $\theta \equiv 0\ [mod.\, 2\pi]$, **cas exclu.**

- **Conclusion :**

Il n'existe pas de racine de P de module 1 autre que 1 et toutes les racines de P (sauf 1) sont de module < 1**.**

Expression exacte de $\boldsymbol{C_n}$

L'équation de récurrence **(3)** admet pour solution générale, **pour $\boldsymbol{n \geq k}$** :

$$\boldsymbol{C_n = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \lambda_i^n = \lambda_k^n \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{\lambda_i^n}{\lambda_k^n} = \lambda_k^n \left(a_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \frac{\lambda_i^n}{\lambda_k^n} \right)}.$$

Comme, par hypothèse : $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right| \leq 1$, on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i \frac{\lambda_i^n}{\lambda_k^n}\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \left|\frac{\lambda_i^n}{\lambda_k^n}\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|.$$

Le comportement de C_n est donc déterminé par la position de $|\lambda_k| = M$ par rapport à 1.

- Si $M < 1$, soit $\boldsymbol{\rho} < \frac{1}{\boldsymbol{k}}$, la suite $\{C_n\}$ tend vers 0.
- Si $M = 1$, soit $\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\boldsymbol{k}}$, alors $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right| < 1$ pour $i = 1, \dots, k-1$ et la suite $\{C_n\}$ tend vers a_k.
- Si $M > 1$, soit $\boldsymbol{\rho} > \frac{1}{\boldsymbol{k}}$, la suite $\{C_n\}$ n'est pas bornée.

Il resterait à étudier le cas général avec $\rho = 1$.

2. **Eléments de réflexion pour une modélisation stochastique**

On peut modéliser l'évolution de la maladie de manière stochastique, à l'aide de chaînes de MARKOV, en s'inspirant du problème des lampes .

Soient *n* lampes.

- à l'instant 0, elles sont toutes éteintes
- à l'instant 1, elles s'allument avec une probabilité *p*, indépendamment les unes des autres
- une lampe allumée en *t* reste allumée en *t + 1, …, t + K - 1* et s'éteint en *t + K* $((K \geq 2)$.
- à un instant quelconque, les lampes non allumées peuvent s'allumer avec une probabilité *p*, indépendamment les unes des autres.

- on peut introduire un état de panne définitive : une lampe qui s'allume en *t* tombe en panne définitivement à l'instant *t + m* avec une probabilité μ.

<u>L'interprétation est alors la suivante :</u>

Lampe allumée = malade atteint de la Covid.
Un malade contaminé en *t* reste malade jusque *t + K - 1* et guérit à *t + K* avec la probabilité $1 - \mu$ ou meurt à *t + m* avec la probabilité μ.

On obtiendra alors une chaîne de MARKOV reflétant les transitions entre les différents états.

On peut toutefois compliquer et améliorer le modèle en supposant ***que la probabilité d'être contaminé à un instant donné est proportionnelle au nombre de malades à cet instant*** pour caractériser la diffusion de la maladie (plus il y a de malades à un instant donné, plus la probabilité qu'apparaisse un nouveau malade est grande).

Dans ce cas, la chaîne de MARKOV ne sera pas stationnaire, ce qui complique l'analyse de ses propriétés.

3. Conclusion

Comme chez l'auteur de la pièce[2], ces petits papiers cherchent un (co-)auteur pour continuer l'histoire, mettre en application les méthodes exposées sur des données réelles, tester leur pertinence et apporter tout complément utile….

Bibliographie

[2] Luigi PIRANDELLO : « *Sei personnagi in cerca d'autore* » (1921)