Calage à poids bornés : Que fait-on au juste ?

Jean-Claude DEVILLE (ex-Crest/Ensai)

Mise en place

Pour toute unité k de la population x_k est un vecteur de p variables auxiliaires présentes dans les données d'un échantillon de taille n.

Le total dans la population des x_k est connu et noté t .

On dispose d'un estimateur initial $\hat{t}$ (en général Horvitz-Thompson, mais ça n'a rien d'obligatoire) linéaire utilisant des poids d_k .

X est la matrice pxn des $x_k d_k$. Elle est supposée de plein rang et, pour simplifier les notations , on écrira toujours x_k pour $x_k d_k$.

$H=Ker(X)$ est noyau de dimension n-p de X.

On a donc $\hat{t} = X\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ vecteur dont les n coordonnées valent 1)

<u>Comment on fait ?</u> On cherche :

-de nouveaux poids g_k compris entre deux valeurs m et M

- obtenir l'égalité $t = \sum_s x_k\, g_k = Xg$ (calage) .

<u>Calage classique</u> : on minimise une ' distance' additive $\sum_s G(g_k\,, 1)$ où G doit avoir de bonne propriétés (convexité stricte et dérivabilité).

La situation est simple : soit le problème n'admet pas de solution, soit admet une solution unique donnée par la résolution des équations de calage $t = \sum_s x_k \ F(q_k x'_k \lambda)$ où λ est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ <u>déduite de la distance</u> , croissante et 'régulière' (dérivable, de limites m et M les limites étant atteintes soit asymptotiquement soit à distance finie).

Remarque : les q_k furent introduit pour justifier l'estimateur ratio….avant qu'on s'aperçoive que c'est une variante de calage généralisé !!!

Si la distance est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier on a toujours une solution et il en va naturellement de même quand m et M sont suffisamment proches de $\pm\infty$. A l'inverse si M-m est faible on n'aura généralement pas de solution. Si M-$m=0$, la seule solution possible est un estimateur par ratio !

Une pratique courante : chercher par tâtonnements des calages où m et M seront respectivement le plus grand et le plus petit possible.

On constate les choses suivantes :

- ***M* et *m* ne dépendent pas de la distance utilisée**
- **La plupart des poids convergent vers *M* ou *m***

Pourquoi ?

En fait, on a un peu changé le problème, et on étudie la position relative de la variété linéaire $Xg=t$ (de dimension n-p) avec le n-cube centré en $c=(M+m)\mathbf{1}/2$ et de côté $D=M$-m.

Supposons c fixé pour commencer ; 3 cas possibles :

- L'intersection est vide (pour D assez petit).
- Elle contient au moins un point intérieur au cube (pour D assez grand) et elle est de dimension n-p.
- D est la valeur limite où l'intersection est un polytope convexe contenu dans une face de la frontière du cube (de dimension au plus n-1). Sa dimension peut varier de 0 (point unique) à n-p.

La procédure de tâtonnement consiste à rechercher un couple (c,D) et un vecteur 'calant' g tels que $max_k\ (|g_k - c|)$ soit minimum.

Il est plus parlant de regarder ce qui se passe dans $\mathbb{R}^p$ espace image de X . On étudie donc la position relative de t et de $K_{c,D}$ image par X du cube de centre c et de coté D.

C'est un polytope de dimension p, fermé convexe et symétrique de centre Xc. <u>Il y a calage quand t est intérieur à $K_{c,D}$</u> .

A c fixé , c'est toujours possible pour $D \geq D_c$:

-Si $<$ on minimise la distance (calage 'habituel')

-si = on obtient un point t_g= Xg de la frontière de K_{c,D_c} résultat du tâtonnement. t_g est dans une *p-1* (ou moins !) face de K_{c,D_c} qui est l'image d'une *p-1* face du *n*-cube.

C'est aussi la limite de $F(q_k x'_k \lambda)$ pour λ infini.

On remarque maintenant que *Xc* (le centre) est autorisé à varier dans la droite qui contient 0 et $\hat{t} = X\mathbf{1}$ **.** La minimisation de D_c achève le tâtonnement.

Il en résulte que *n-p+2* des g_k valent *m* ou *M* (‘équations’ d’une *p*—2 face) , les *p-2* restant servant à définir notre point dans sa *p-2*-face.

Comme annoncé par la pratique, ce résultat explique le groupement de presque tous les poids aux deux bornes, <u>indépendamment de la distance</u> utilisée pour faire les calculs !
La recherche de *c* est en fait l’estimation d’un paramètre supplémentaire qui amène notre point au bord de sa *p*-1-face, sur une *p-2* face avec un g_k de plus à la borne.

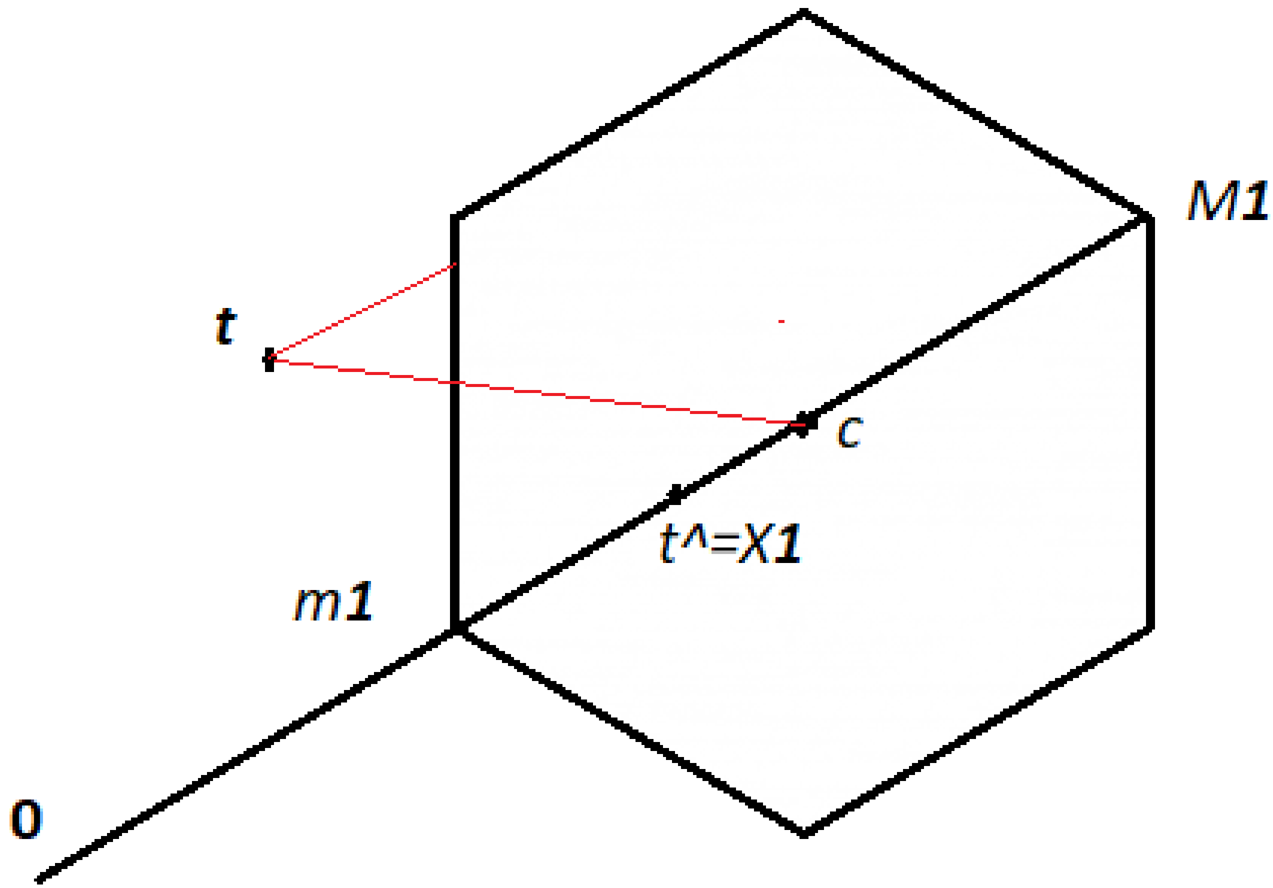


Illustration du bazar

Quelques commentaires

Le cas où l'intersection ne se réduit pas à un point est lié à une particularité des données (colinéarités pour des familles de moins de p vecteurs x_k). Je m'en tire par une construction qui les élimine mais c'est compliqué bien que ça ne change pas la nature des choses.

On a en fait estimé 2 paramètres de plus m et M . Quel sont les conséquences sur les justifications (asymptotiques !) du calage ?

Sans doute rien de dramatique, mais va t'en savoir…

On minimise une distance de type l_∞ . Approximable par l_p pour p grand ?

On pourrait généraliser à des situations plus complexes , par exemple avec des m_k et M_k (robustesse, domaines…).

Où les choses se compliquent un peu :Où on en est ??

1- Si t intérieur à K $t=Xg$ avec $g_k = F(q_k x'_k \lambda)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^p$

2-Si t à la frontière de K presque tout les poids valent m ou M et correspondent à un $\lambda = \pm\infty$ (pour au moins une composante).

En fait les g admissibles constituent une variété G de dimension p telle que $G+H$ recouvre le cube C_n . Tout point du cube se projette le long de H en un point unique de G.

3-S_K= ensemble des sommets de K est l'image par X d'une partie des sommets de C_n , qui définissent le 'contour apparent'. Les autres se 'projettent' à l'intérieur de K. (ex :un 3-cube)

Cela vaut pour le calage ‘métrique’ où *X* détermine, avec la métrique, la variété *G.*

Le contour apparent, lui, ne dépend que de *Ker(X)* !!

Est-ce encore vrai dans le cas du calage généralisé , où G est de la forme $g_k = F(z'_k\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^p$) avec des z_k ‘quelconques’ ?

NON !

Un exemple minimaliste :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; et \; Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

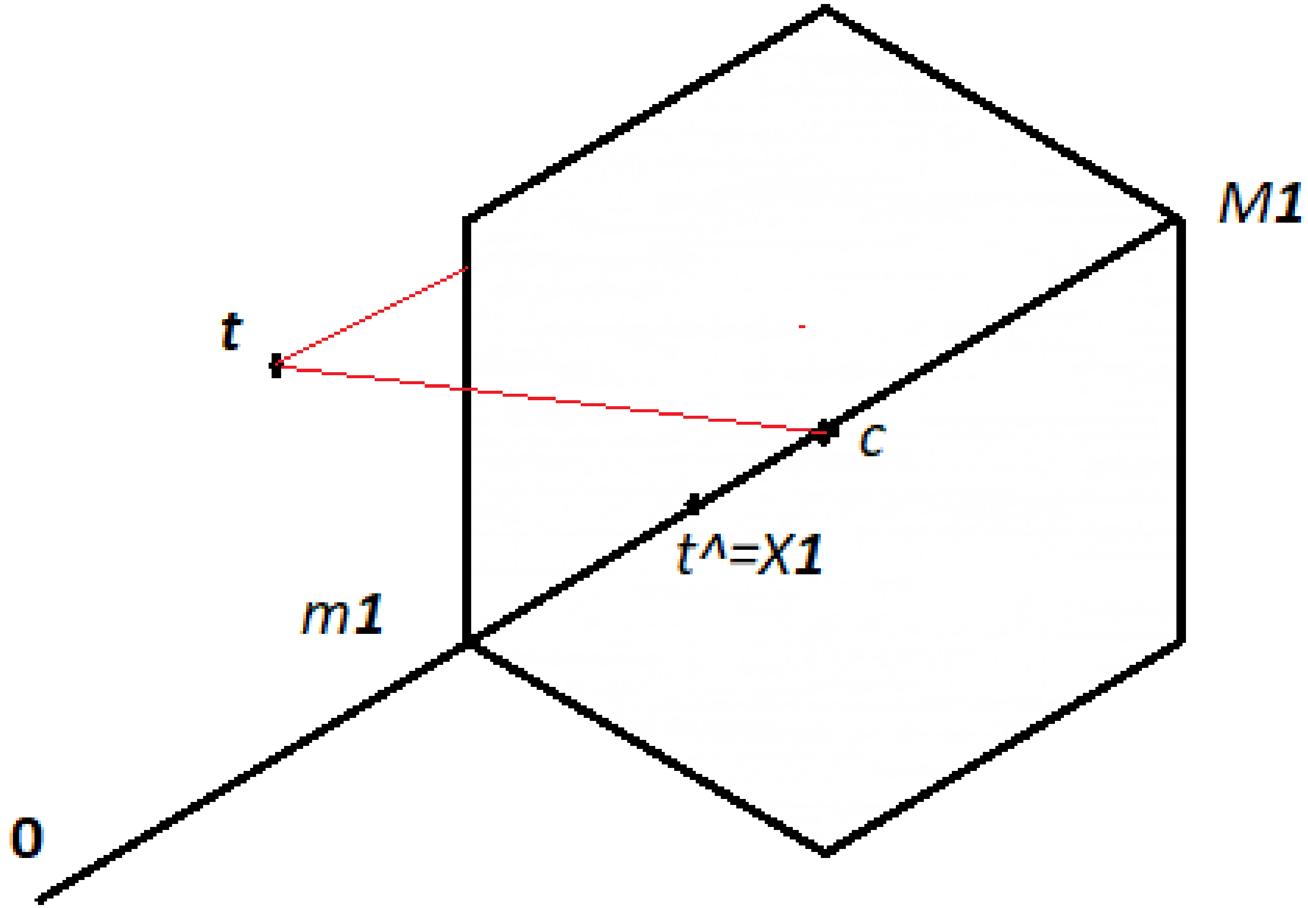
$$Ker(X) = (1 \;\; 1 \; -1)'$$

c'est du calage ordinaire et tout va bien , avec n'importe quelle fonction *F*!

Si on fait $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c'est la catastrophe !

Ker(X)=(1 -1 -1)'

Les sommets (1 1 0) et (0 0 1) du cube ne sont pas atteints…et on trouve des cas où le calage a deux solutions distinctes.


M1
t
c
t^=X1
m1
0

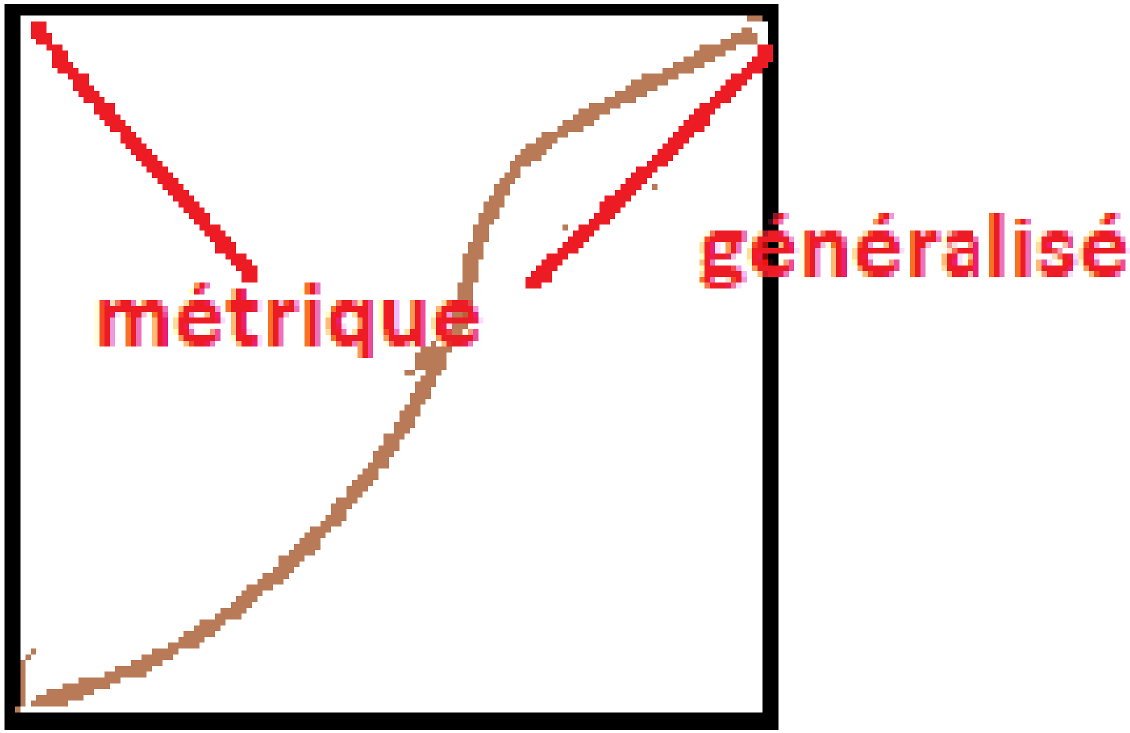


Illustration simpliste de la différence entre calage métrique et calage généralisé

Une condition nécessaire évidente pour que ‘ça’ marche encore pour le calage généralisé :

G (défini uniquement par Z) atteint tous les sommets du contour apparent de C_n (défini uniquement par X).

Je conjecture que cette condition est également suffisante.

Elle est elle-même entrainée par $z_k = q_k x_k$ où les q_k sont des matrices diagonales inversibles. Autrement dit pour chaque k les coordonnées des z_k et des x_k ont le même signe.(même orthant)

En particulier si toutes les variables du problème sont positives le calage généralisé à poids bornés fonctionne comme un calage métrique.

Ouf, c’est fini !

Merci de votre présence, voire de votre attention