TESTS DE MONTE CARLO DE DETECTION DE MODIFICATIONS CLIMATIQUES

par

Jean Cléophas ONDO, Ph.D

Journées de Méthodologie Statistique 2015

Issea

PLAN DE LA PRESENTATION

- Introduction
- Etat des connaissances
- Originalité du papier
- Principaux résultats
- Conclusion

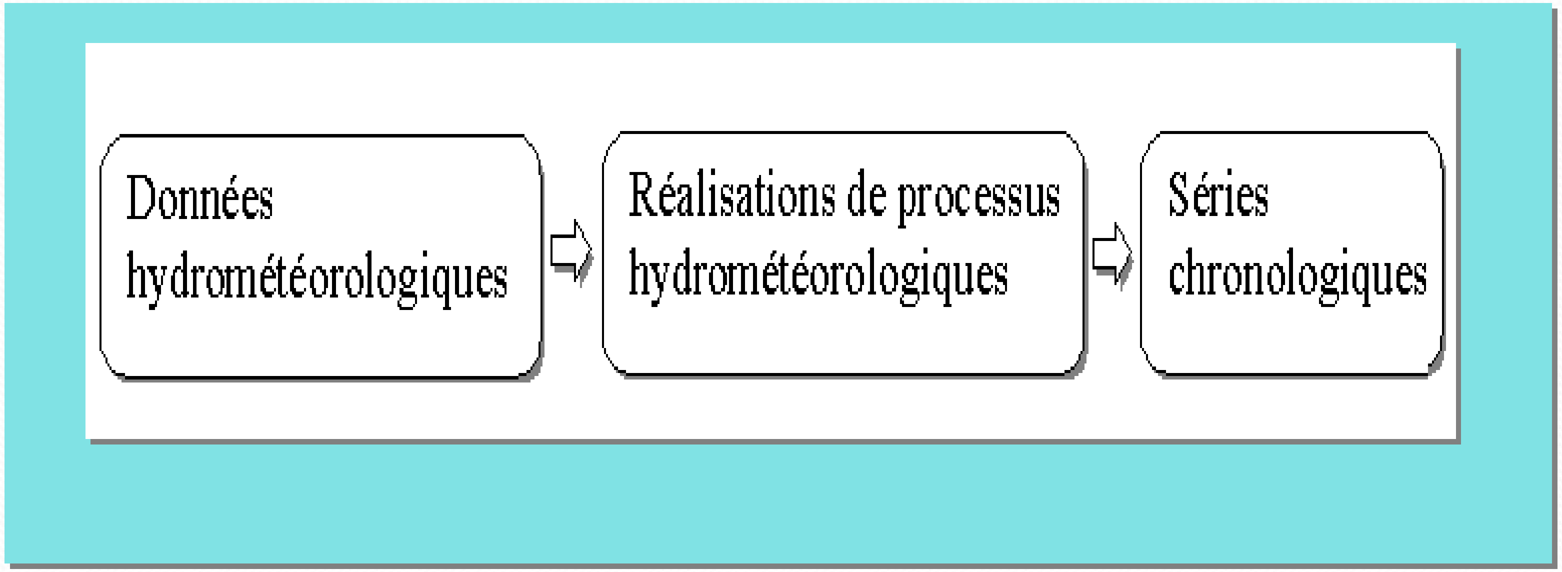
PLAN DE LA PRESENTATION

- Introduction
- Etat des connaissances
- Originalité du papier
- Principaux résultats
- Conclusion

1. Introduction

- **Notion de stationnarité en hydrométéorologie**

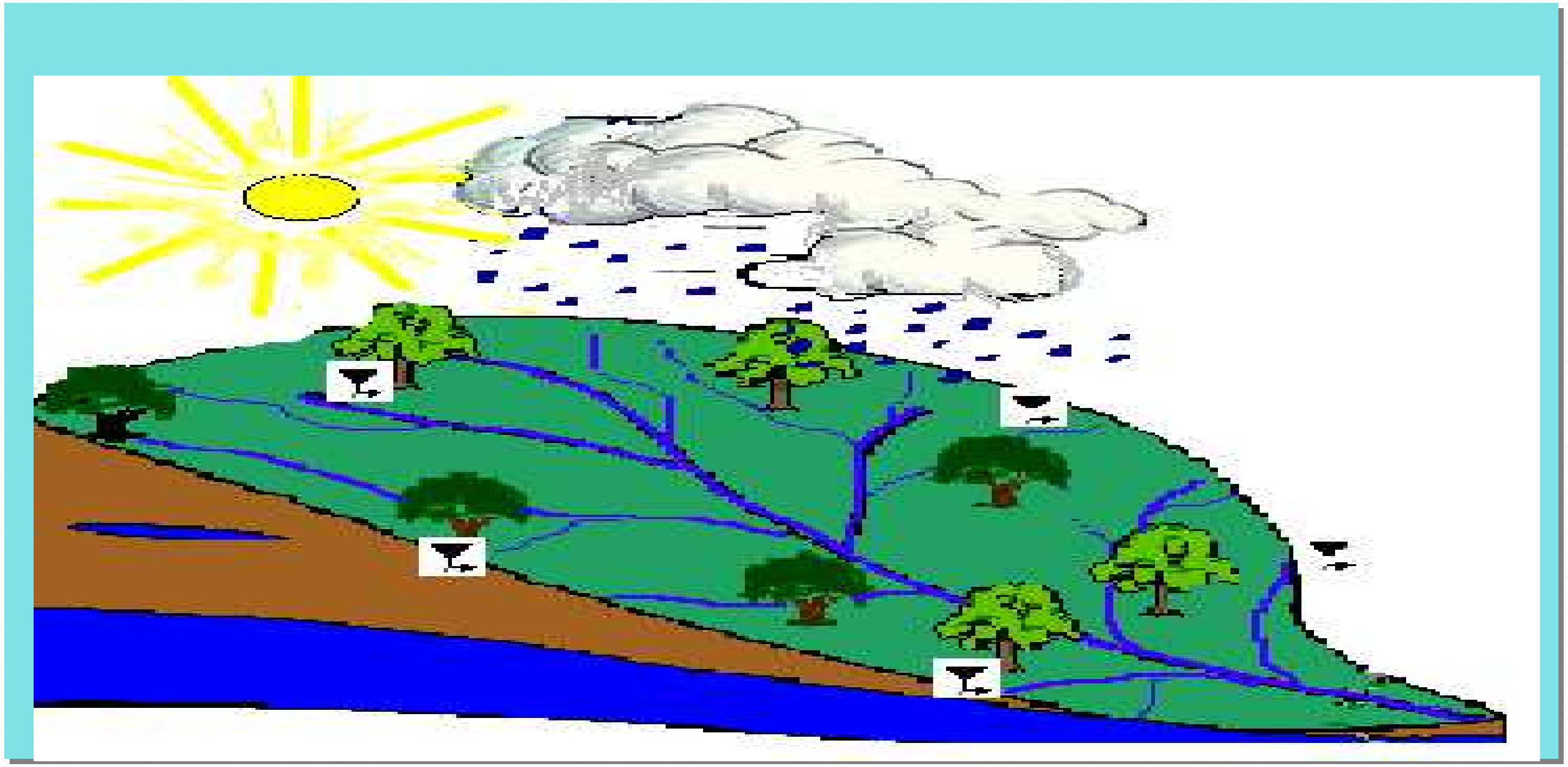
données



1. Introduction

- **Notion de stationnarité en hydrométéorologie**

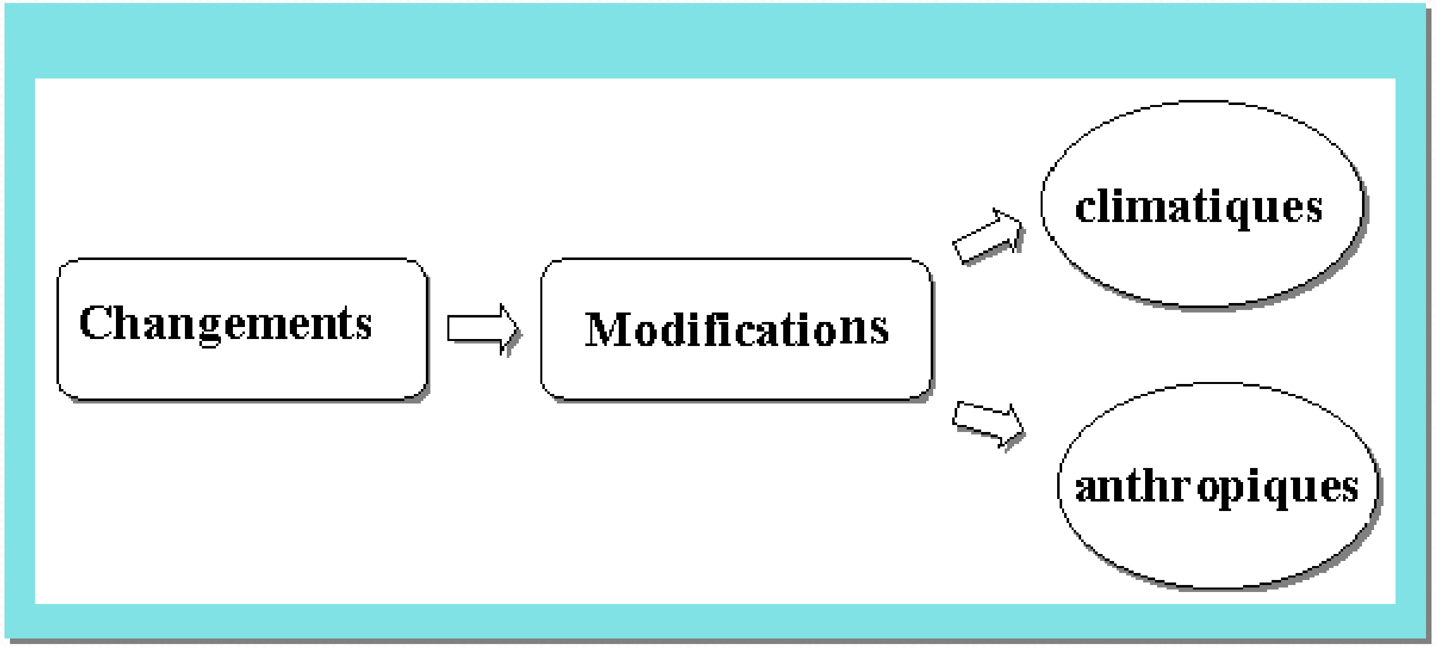
une illustration de la collecte des données



1. Introduction

- **Notion de stationnarité en hydrométéorologie**

Hypothèses



1. Introduction

- **Détection d'une modification climatique**

- La détection repose entre autres analyses sur :
  - tests de stationnarité
  - tests de stabilité temporelles
  - tests de détection de rupture

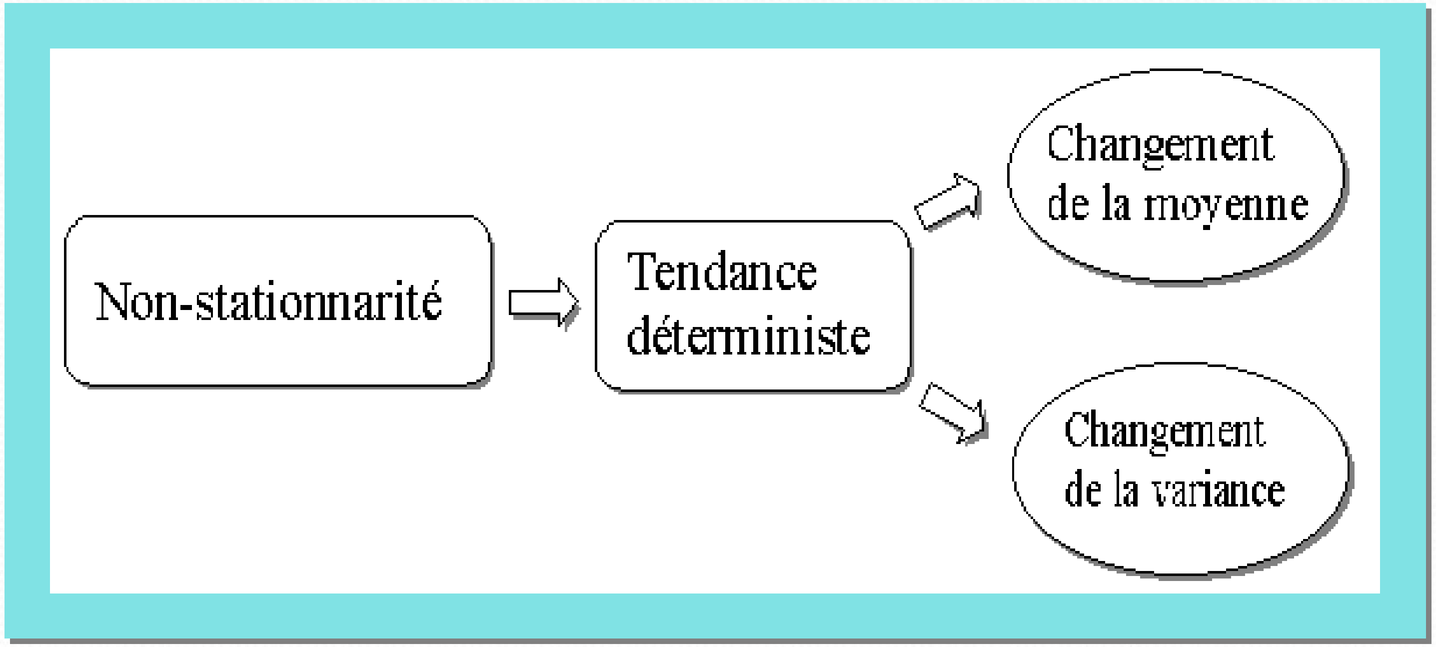
PLAN DE LA PRESENTATION

- Introduction
- Etat des connaissances
- Originalité du papier
- Principaux résultats
- Conclusion

2. Etat des connaissances

- **Non-stationnarité en hydrométéorologie**

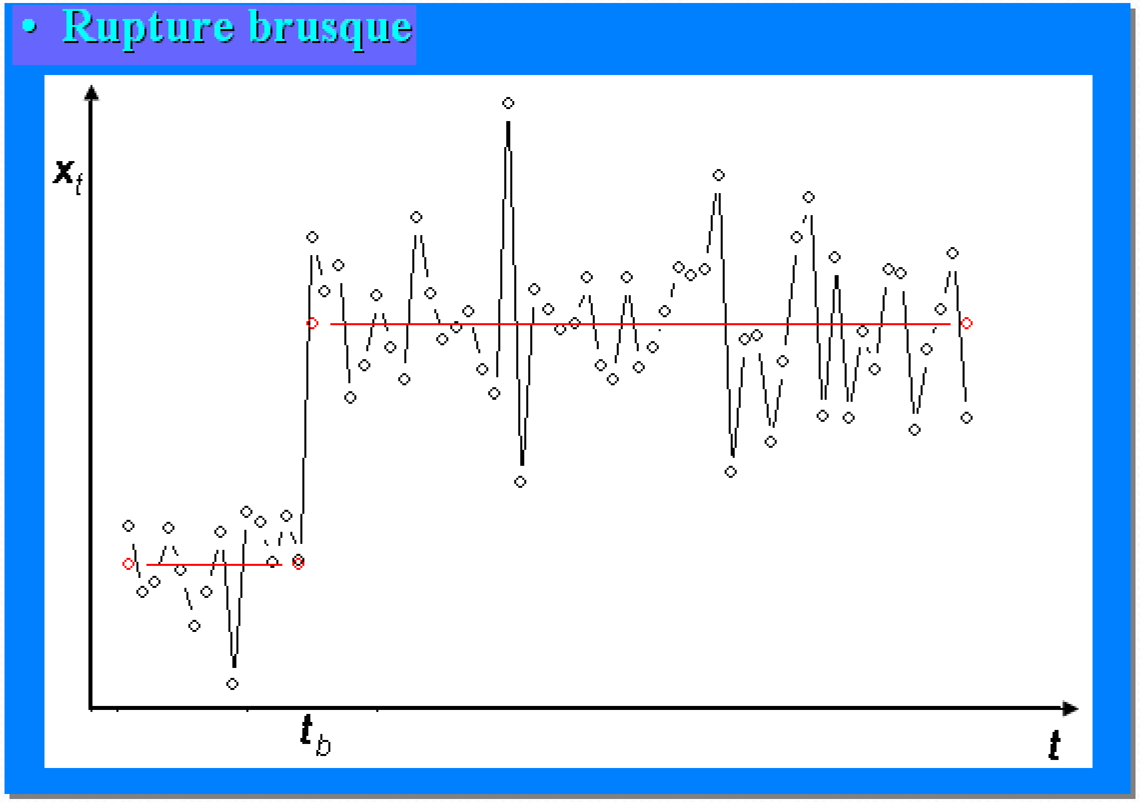
<u>Causes</u> (CAVADIAS, 1992)



2. Etat des connaissances

- **Non-stationnarité en hydrométéorologie**

Types

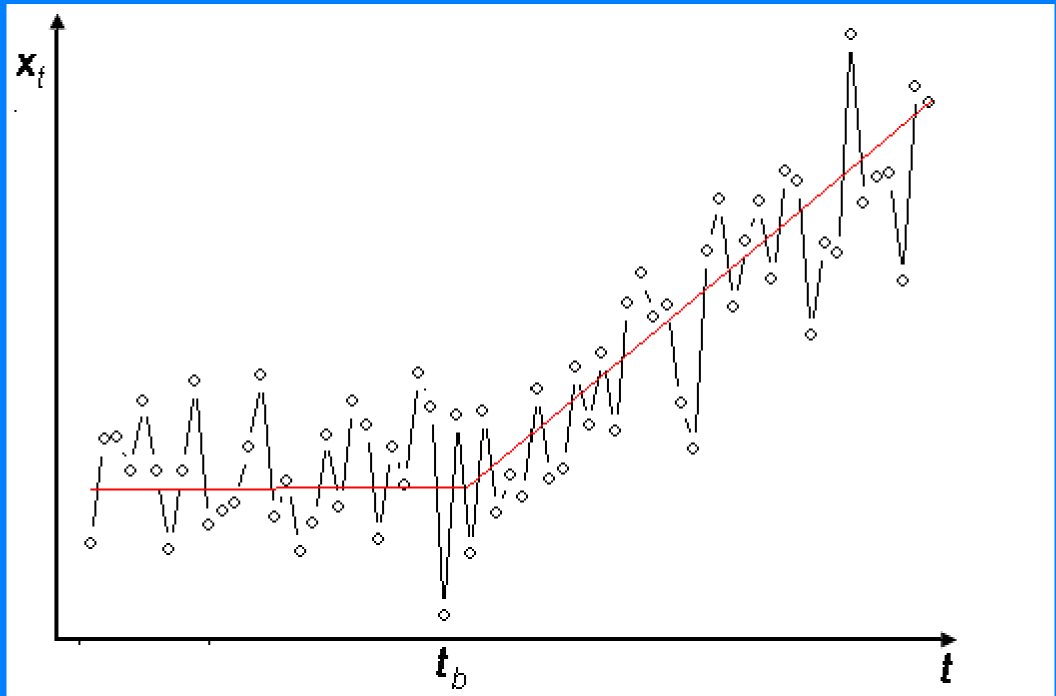


2. Etat des connaissances

- **Non-stationnarité en hydrométéorologie**

Types

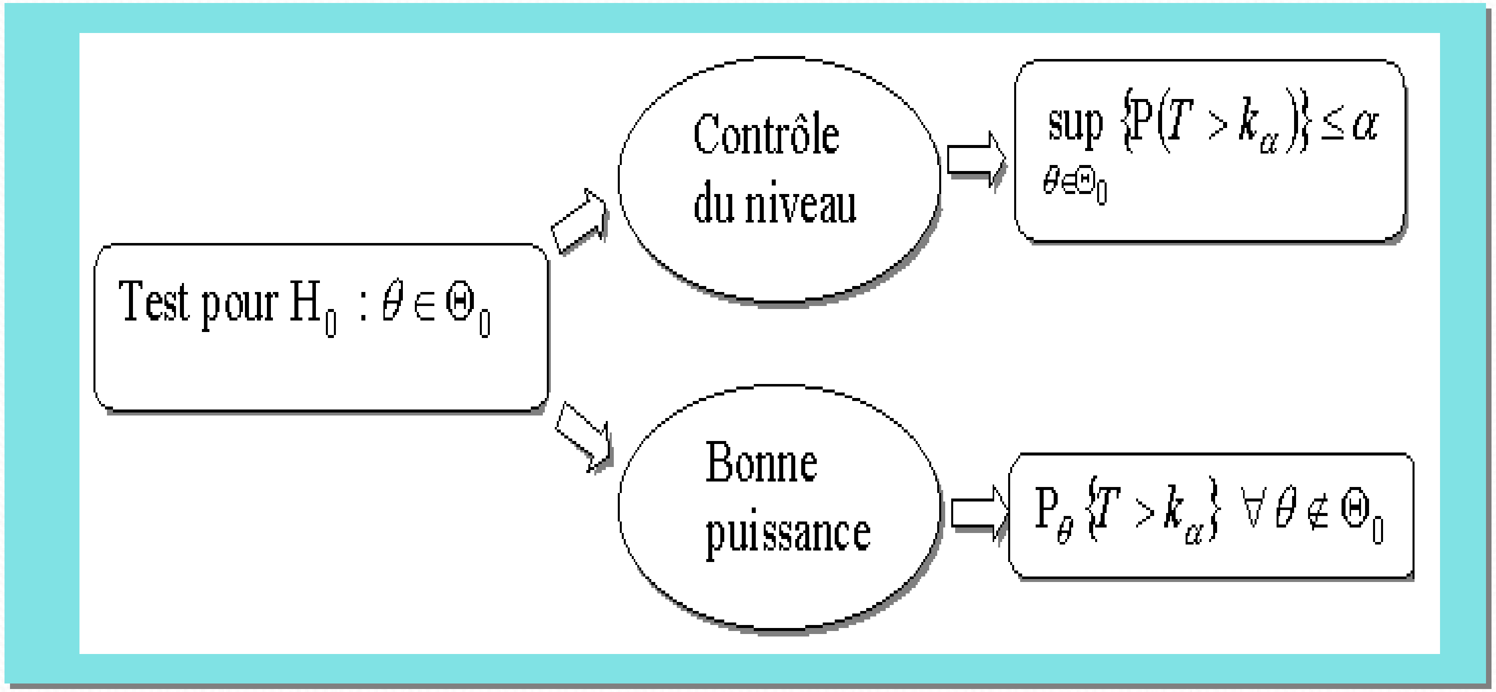
- **Rupture avec continuité**



2. Etat des connaissances

- **Tests statistiques de détection**

  Propriétés désirables d'un test d'hypothèses



2. Etat des connaissances

- **Tests statistiques de détection**

  Difficultés dans l'élaboration d'un test d'hypothèses

Détermination de k_α

Dériver la loi de T sous H_0

Résoudre le problème d'optimisation

2. Etat des connaissances

- **Tests utilisés en hydrométéorologie**

  - <u>Tests de détection d'une rupture</u> :
    - *tests paramétriques*
    - *tests non paramétriques*
    - *tests bayésiens*

2. Etat des connaissances

- **Tests utilisés en hydrométéorologie**

  - <u>Tests de détection de plusieurs ruptures</u> :
    - *Procédure de segmentation des séries hdrométéorologiques proposée par HUBERT et al. (1989)*

2. Etat des connaissances

- **Tests utilisés en hydrométéorologie**

  - Difficultés relevées dans la littérature :
    - *loi de la statistique de test inconnue*
    - *points critiques simulés*
    - *absence d'un test de détection de ruptures*
    - *absence d'un test régional*

PLAN DE LA PRESENTATION

- Introduction
- Etat des connaissances
- Originalité du papier
- Principaux résultats
- Conclusion

3. Originalité du papier

- **Objectif poursuivi**

  - Proposer des tests exacts de détection de rupture :
    - *test de Monte Carlo de détection d'une rupture*
    - *test séquentiel 1 de détection de ruptures*
    - *test séquentiel 2 de détection de ruptures*

3. Originalité du papier

- **Modèle de base**

modèle de régression linéaire de BAI et PERRON (1998)

$$x_t = y_t' b + z_t' d_j + \varepsilon_t,\ t = \left(T_{j-1}+1\right)+\cdots+T_j$$

$$j = 1,\ldots,m+1$$

où,

- les dates $T_1,\ldots,T_m$ sont inconnues
- $\varepsilon_t \sim N\ (0,1)$

Issea

3. Originalité du papier

- **Modèle pour une modification climatique**

  saut brusque de la moyenne (CAVADIAS, 1992)

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 ID(t_b) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

où,

$$\bullet\, ID(t_b) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_b \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

3. Originalité du papier

- **Modèle pour une modification climatique**

saut continu de la moyenne (CAVADIAS, 1992)

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 ID(t_b) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

où,

- $ID(t_b) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le t_b \\ (t - t_b) & \text{autrement} \end{cases}$

Issea

3. Originalité du papier

- **Modèle pour une modification climatique**

  hypothèse principale d'absence de rupture

$$H_0 = \beta_1 = 0$$

3. Originalité du papier

- **Statistique de test**

  cas d'une rupture

$$F_{\max} = \max_{3 \le t_b \le (n-2)} \left\{ F\left(t_b\right) \right\}$$

où,

- $F\left(t_b\right)$ est la statistique de Fisher pour tester H_0
- $t_b = 3, \ldots, (n-2)$

3. Originalité du papier

- **P-valeur du test MC**

  principe du test de MC

Situation : tester $H_0 : \theta \in \Theta_0$

- T
- $F(x)$: distribution de T
- $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$

Technique des tests MC $\Rightarrow$ Remplacer $F(x)$ par $\hat{F}_N(x)$ basée sur $\{T_1, \ldots, T_N\}$

3. Originalité du papier

- **P-valeur du test MC**

  principe du test de MC: p-valeur

- p-valeur du test de MC

$$\hat{p}_N\left(T_{Obs}\right) = \frac{N\hat{G}_N\left(T_{Obs};T_1,\ldots,T_N\right)+1}{N+1}$$

- région critique du test MC

$$\hat{p}_N\left(T_{Obs}\right) \leq \alpha$$

3. Originalité du papier

- **P-valeur du test MC**

  principe du test de MC: résultat de Dufour (1995)

$$\boxed{\begin{array}{l} T \text{ pivotale,} \\ \alpha(N+1) \text{ entier} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \hat{p}_N(T_0) \le \alpha \\ \text{exacte} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{P}\{\hat{p}_N(T_0) \le \alpha / \mathrm{H}_0\} = \alpha}$$

3. Originalité du papier

- **Pivotalité de la statistique de test de MC**

cas d'une rupture

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

où,

- $X = \begin{bmatrix} 1 & ID(t_b) \end{bmatrix}$
- $Y = (x_1, \ldots, x_n)$
- $\beta = (\beta_0, \beta_1)$;
- $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$

3. Originalité du papier

- **Pivotalité de la statistique de test de MC**

cas d'une rupture

$$F\left(t_b\right)=\frac{\hat{\varepsilon}_c'\,\hat{\varepsilon}_c-\hat{\varepsilon}'\,\hat{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}'\,\hat{\varepsilon}}\times\frac{n-k}{q}$$

Or,

$$\hat{\varepsilon}=\boldsymbol{M}_{(t_b)}\varepsilon \qquad et \qquad \hat{\varepsilon}_c=\boldsymbol{M}_c\,\varepsilon$$

Ainsi,

$$F\left(t_b\right)=\frac{\varepsilon'\,\boldsymbol{M}_c\,\varepsilon-\varepsilon'\,\boldsymbol{M}_{(t_b)}\,\varepsilon}{\varepsilon'\,\boldsymbol{M}_{(t_b)}\,\varepsilon}\times\frac{n-k}{q}$$

Issea

3. Originalité du papier

- **Pivotalité de la statistique de test de MC**

cas d'une rupture

Si maintenant on divise le numérateur et le dénominateur par σ, on a

$$F(t_b) = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)' M_c \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)' M_{(t_b)} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)' M_{(t_b)} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)} \times \frac{n-k}{q}$$

d'où,

$$F(t_b) = \frac{w' M_c w - w' M_{(t_b)} w}{w' M_{(t_b)} w} \times \frac{n-k}{q}$$

avec $w = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

Issea

3. Originalité du papier

- **Pivotalité de la statistique de test de MC**

cas d'une rupture

c'est-à-dire,

$$F(t_b) = \frac{(w)' M_c (w) - (w)' M_{(t_b)} (w)}{(w)' M_{(t_b)} (w)} \times \frac{n-2}{1}$$

avec,

- $M_{(t_b)} = \left[I - X (X'X)^{-1} X' \right]$
- $M_c = \left\{ \left[I - X (X'X)^{-1} X' \right] + X (X'X)^{-1} R' \left[R (X'X)^{-1} R' \right]^{-1} R (X'X)^{-1} X' \right\}$
- $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Originalité du papier

- **Pivotalité de la statistique de test de MC**

  cas d'une rupture

- La statistique de test F_{max} est pivotale !
  - *Puisque la variable aléatoire w est distribuée selon une loi centrée réduite, il en résulte que, sous l'hypothèse principale d'absence de rupture.*

3. Originalité du papier

- **Statistique de test**

  cas de plusieurs ruptures

- Procédure de test séquentiel :
  - *appliquer le test de MC de détection d'une rupture sur la série temporelle complète, ensuite diviser la série en deux au point de rupture détectée, et appliquer itérativement le test de MC de détection de rupture sur les deux segments jusqu'à ce que plus aucune rupture ne soit détectée.*

3. Originalité du papier

- **Statistique de test**

  cas de plusieurs ruptures

- Test séquentiel 1

$$SQ1 = 1 - \prod_{i=1}^{m} pv(F_i^{\max})$$

- Test séquentiel 2

$$SQ2 = 1 - \prod_{i=1}^{m} pv(F_i^{\max})$$

PLAN DE LA PRESENTATION

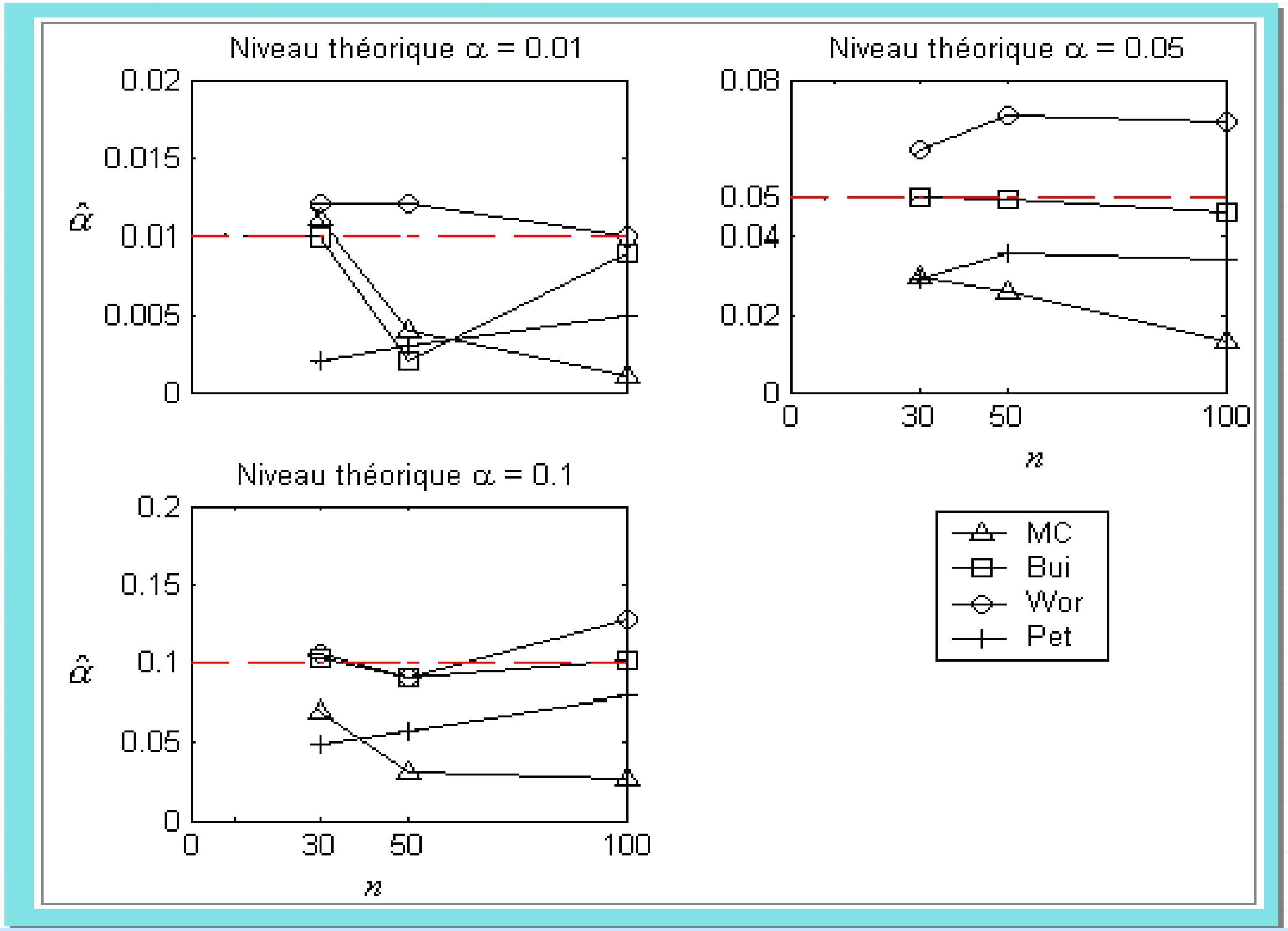
- Introduction
- Etat des connaissances
- Originalité du papier
- Principaux résultats
- Conclusion

Issea

4. Principaux résultats

- **Test de MC de détection d'une rupture**

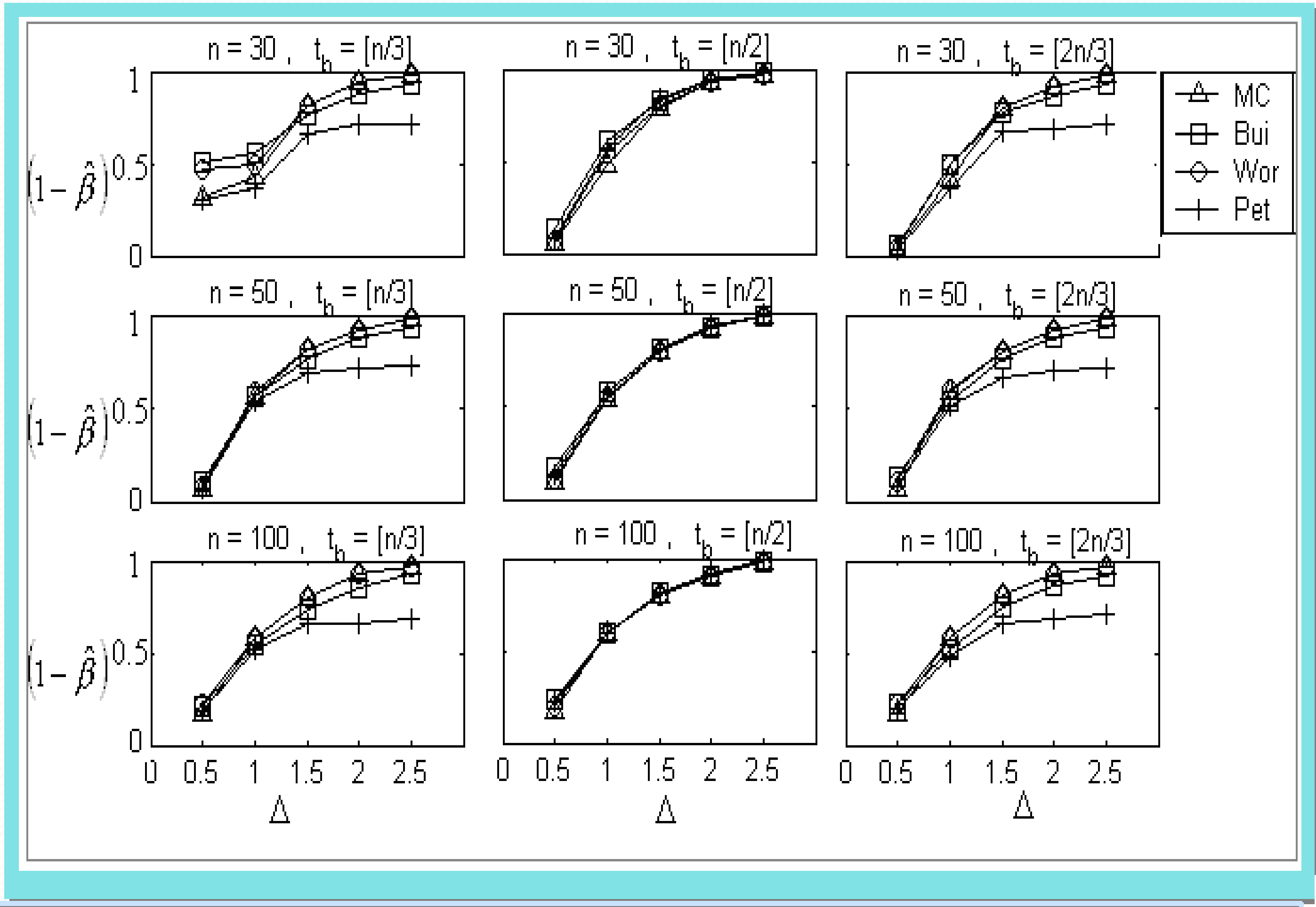
  étude de niveau



4. Principaux résultats

- **Test de MC de détection d'une rupture**

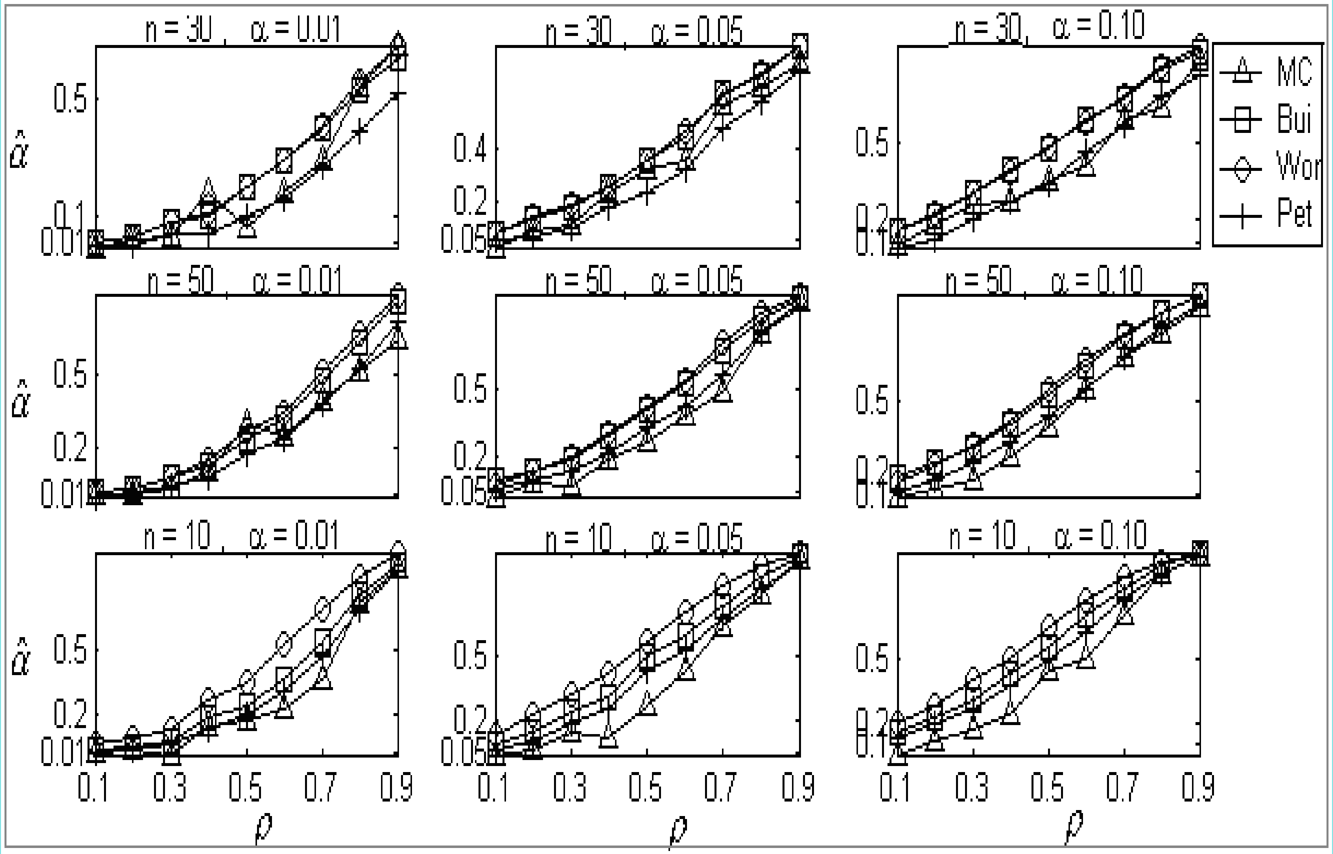
  étude de puissance



4. Principaux résultats

- **Test de MC de détection d'une rupture**

  étude de robustesse



Issea

4. Principaux résultats

- **Test de MC de détection de plusieurs ruptures**

  étude de niveau et de puissance

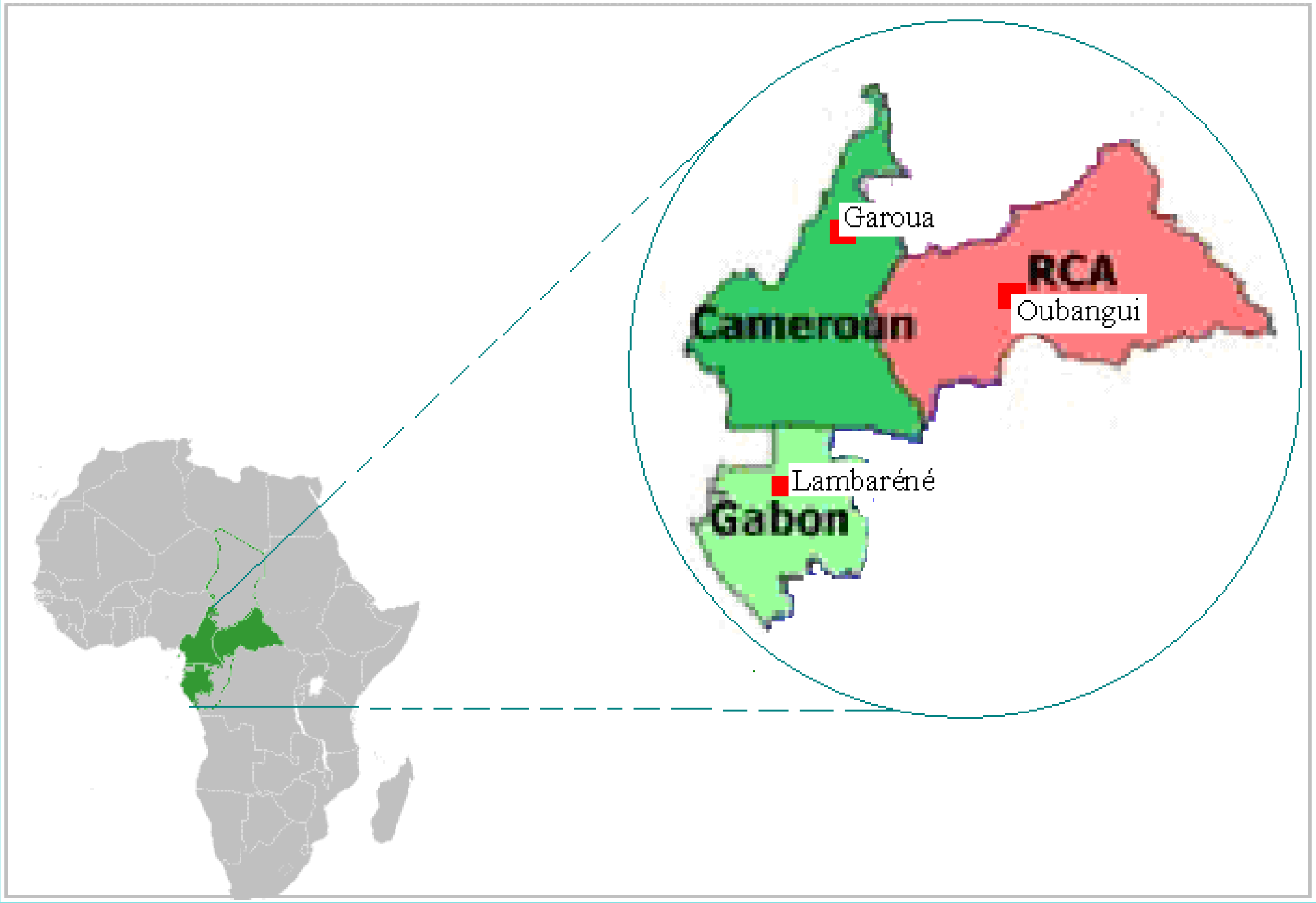
n	Niveau de signification α = 5%
30	0.043
50	0.028
100	0.016

Niveau de signification α = 5% ($h = 10$)						
n	**k**	$\Delta = 0.5\%$	$\Delta = 1\%$	$\Delta = 1.5\%$	$\Delta = 2\%$	$\Delta = 2.5\%$
30	0	0.687	0.077	0.000	0.000	0.000
	1	0.313	0.923	1.000	1.000	1.000
50	0	0.290	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.710	1.000	1.000	1.000	1.000
100	0	0.042	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.958	1.000	1.000	1.000	1.000

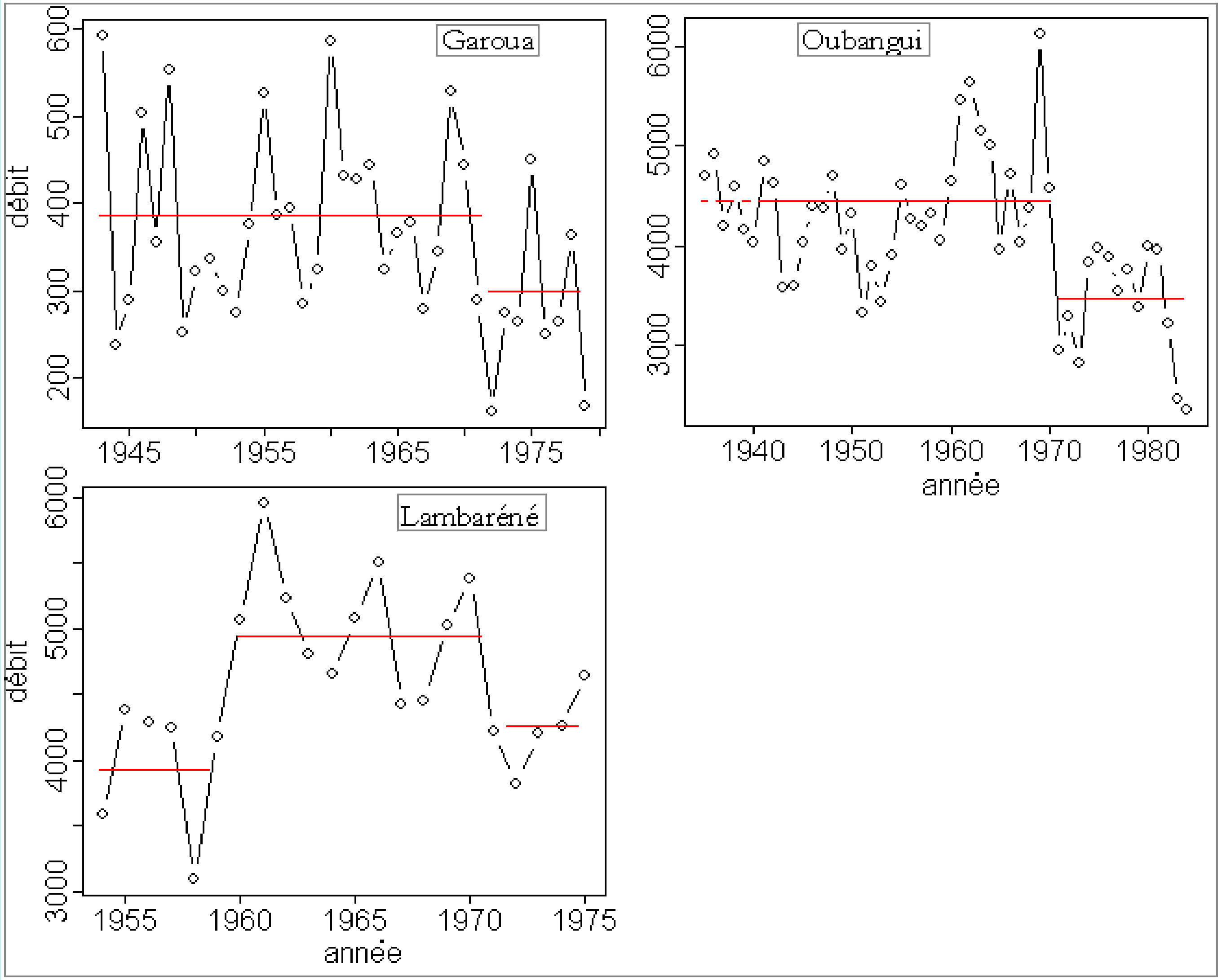
4. Principaux résultats

- **Application**

  débits annuels



4. Principaux résultats



4. Principaux résultats

- **Application**

débits annuels

Station	Date probable de modification	p-valeur
Garoua	1970	0.174
Bangui	1970	0.001^*
Lambaréné	1959	0.084

$$\varepsilon \overset{iid}{\sim} N(0,1), \quad N = 999,$$

* p-valeur significative au niveau $\alpha = 1\%$

PLAN DE LA PRESENTATION

- Introduction
- Etat des connaissances
- Originalité du papier
- Principaux résultats
- Conclusion

5. Conclusion

- **Apport dans la littérature**
  - Proposition d'un test exact de détection d'une rupture
  - Proposition de deux tests exacts de détection de ruptures

5. Conclusion

- **Perspectives de recherche**
  - Généralisation des tests à tout type de modèles de changement de la moyenne et/ou de la variance d'une chronique lorsque la statistique de test est pivotale
  - Généralisation à des modèles considérant la dynamique des chroniques