Filtres linéaires minimisant le déphasage pour l'ajustement saisonnier

Fabien Guggemos, Dominique Ladiray,
INSEE

Michel Grun-Rehomme,
ENSAE





Contexte (1)

Méthodes de désaisonnalisation, d'extraction de cycle… Reposent essentiellement sur des filtres linéaires:

Filtre de Wiener-Kolmogorov (Tramo-Seats), moyennes mobiles (X12) ….

Problème des fins de séries… → Impossibilité d'utiliser "formellement" des filtres symétriques sur les points les plus récents

- Filtres asymétriques
- Filtres symétriques sur séries prolongées dans le futur par des modèles de prévision ≈ Filtres asymétriques

Beaucoup d'études dans la littérature pour générer des filtres asymétriques "optimaux" (minimisation des révisions…)

Musgrave, 1964; Dagum, 1975; Wallis, 1981; Ladiray, Grun-Rehomme, 1994; Gray, Thompson, 1996, Dagum et al, 2008 ; Proietti, Luati, 2007 …

Contexte (2)

Problème : les filtres asymétriques introduisent des déphasages…

Objectif : produire des moyennes asymétriques minimisant le déphasage (pour X12 notamment, recherche pour Eurostat)

$\rightarrow$ *Pour mieux estimer en temps réel les points de retournement de l'économie par ex.*

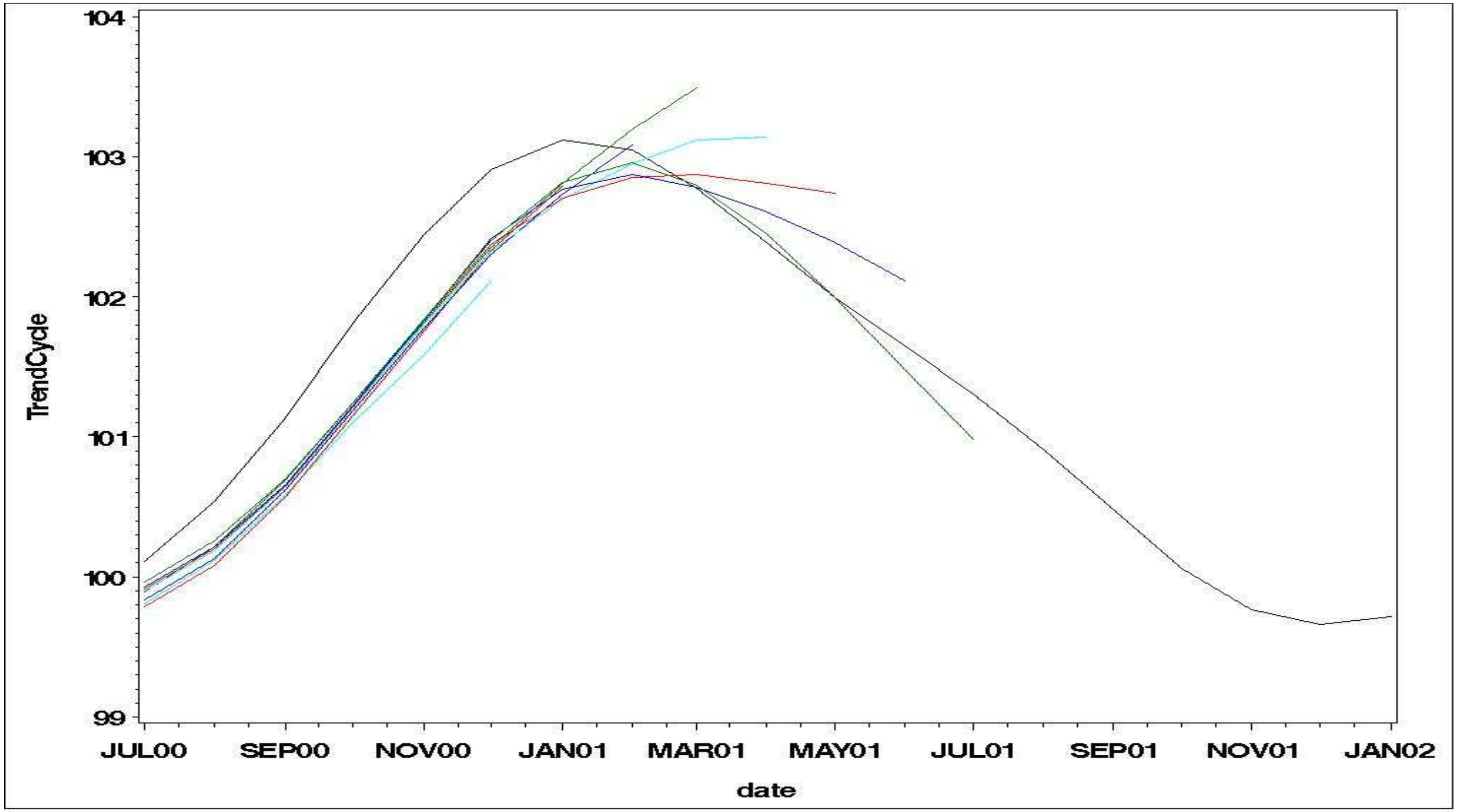
En réalité, 2 approches développées simultanément avec objectifs similaires (déphasage):

- $\rightarrow$ Filtres paramétriques indépendants des données,
  (Grun-Rehomme M., Guggemos F., Ladiray D.)
- $\rightarrow$ Filtres non-paramétriques dépendants des données,
  (DFA Généralisé, *Wildi M.*)

Comparaison des 2 approches $\Rightarrow$ Lien théorique $\Rightarrow$ Cadre général théorique unifié, englobe aussi filtres classiques (Musgrave, Henderson, Hodrick-Prescott,…)

Un exemple concret…

Tendance-cycle de l'IPI français obtenu avec X11



Fonctions de gains et de phases

Pour Y_t série temporelle de fréquence ω, d'amplitude a,

$$Y_t = ae^{i\omega t} = a\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right]$$

$$Y_t^* = M(Y_t) = \sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k \left[ae^{i\omega(t+k)}\right] = ae^{i\omega t} \sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k e^{i\omega k} = Y_t \underbrace{\left[\rho_\theta(\omega) e^{i\varphi_\theta(\omega)}\right]}_{=M_\theta\left(e^{i\omega}\right)}$$

$\rho_\theta(\omega)$ module

de la fonction de transfert $M_\theta\left(e^{i\omega}\right)$

$\varphi_\theta(\omega)$ phase

Choisir une “bonne” moyenne mobile

Décomposition simple de série temporelle

$$X_t = TC_t + S_t + \varepsilon_t$$

Des MM préservant la tendance, supprimant la saisonnalité et les composantes irrégulières ?

$$\begin{aligned} MX_t &= M\left[TC_t + S_t + \varepsilon_t\right] \\ &= M\left[TC_t\right] + M\left[S_t\right] + M\left[\varepsilon_t\right] \approx TC_t + 0 + 0 \end{aligned}$$

Quels critères pour déterminer des MM préservant des tendances linéaires, polynômiales…, supprimant des saisonnalités mensuelles, trimestrielles…, et réduisant au maximum le bruit résiduel ?

Préservation des tendances

Exemple très simple : préservation des contantes

Si on considère une série $X_t = a$ et une moyenne mobile M :

$$M\left[X_t\right] = \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i X_{t+i} = a \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i \quad \text{et} \quad M\left[X_t\right] = X_t \Leftrightarrow a \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i = a \Leftrightarrow \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i = 1$$

Les coefficients doivent simplement se sommer à 1

Plus généralement, pour préserver des polynômes de degré *d*, les coefficients de la moyenne mobile doivent satisfaire des contraintes *linéaires* :

$$\sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i = 1 \qquad \text{and} \qquad \forall k \in \{1,2,\ldots\ldots,d\} \quad \sum_{i=-p}^{i=+f} i^k \theta_i = 0$$

Supprimer la saisonnalité

Encore un petit exemple … Une moyenne mobile d'ordre k (coeffs tous égaux à 1/k) supprime les saisonnalités fixes de période k

$\rightarrow$ Fonction de gain valant 0 à la fréquence 2π/k.

Plus généralement, il est possible de traiter le cas de saisonnalités fixes ou variant linéairement (et même polynômialement) avec le temps. Il suffit d'imposer des contraintes spécifiques *linéaires* sur les coeffs des MM

(cf Ladiray, Grun-Rehomme (1994))

Réduire la composante irrégulière

Pour une composante résiduelle irrégulière modélisée simplement par un bruit blanc, ε_t , (moyenne nulle, variance σ^2, décorrélé)…

Transformation par une moyenne mobile en un processus stationnaire (autocorrélé), (ε^*_t), de variance

$$\sigma^{*2} = \sigma^2 \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i^2$$

$\rightarrow$ Pour réduire la composante irrégulière / sa variance, idée : Minimiser la somme des carrés des coeffs .

Critère de Fidélité de Bongard : F (Fidelity)

Les moyennes mobiles de Henderson

Henderson propose un autre critère,

Critère de lissage de Henderson : S (Smoothness)

$$S = \sum \left(\nabla^3 \theta_i\right)^2$$

Les moyennes mobiles de Henderson sont les solutions du programme :

$$\begin{cases} \underset{\theta}{Min} \sum \left(\nabla^3 \theta_i\right)^2 \\ \sum_{i=-p}^{i=+f} \theta_i = 1, \quad \sum_{i=-p}^{i=+f} i\theta_i = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=-p}^{i=+f} i^2\theta_i = 0 \end{cases}$$

Elles préservent les tendances polynômiales de degré 0,1 et 2 (et 3 pour les moyennes symétriques (*p*=*f*))

Les moyennes mobiles de Musgrave

Minimiser l'espérance des révisions, écart entre…

- Signal "réel" filtré par une MM asymétrique M_θ, vecteur de coeffs θ

  la MM s'applique aux seuls points présent et passés de la série.

- Signal prolongé dans le futur par un modèle, filtré par une MM symétrique M_w, vecteur de coeffs w

  la MM s'applique aux points présent et passés de la série mais aussi à des prédictions des points futurs.

… sous des modélisations de fins de séries standards (tendance linéaire, bruit blanc)

(aisément généralisables; tendance polynômiale, composante saisonnière…)

Un cadre général théorique unifié (1)

Une première généralisation : tous les problèmes mentionnés jusqu'ici sont de la forme…

$$\begin{cases} \underset{\theta}{Min}(\theta - w)^{'}\Omega(\theta - w) \\ \quad \text{with} \quad C\theta = a \end{cases}$$

On connaît la solution analytique ! *(Optim quadratique sous contraintes linéaires)*

$$\theta = \Omega^{-1}C^{'}\left(C\Omega^{-1}C^{'}\right)^{-1}(a - Cw) + w$$

Exemple :

Pour le critère "Fidelity", Ω = matrice identité, w=0

Pour Musgrave, Ω = Matrice de variance du bruit résiduel

…

Un cadre général théorique unifié (2)

Plus généralement …

$$\begin{cases} \underset{\theta}{Min} \ \ E\left(\nabla^k\left(\theta' X_t - u_t\right)\right)^2 \\ \text{with} \ \ C\theta = a \end{cases}$$

Sous les modèles usuels et des contraintes adéquates (saisonnalité, etc), on retrouve les critères précédents

$u_t = E\left(\theta' X_t\right) \rightarrow$ Fidelity (k=0), Smoothness (k=3)

$u_t = w' X_t \rightarrow$ Musgrave (k=0)

Quand on relâche certaines hypothèses de modélisation, on obtient une classe plus large de filtres linéaires, pouvant éventuellement dépendre des données à analyser

$\rightarrow$ Approche de *Wildi* : DFA (Direct Filter Approach) généralisé

Vers l’approche “DFA généralisé “ (Wildi) (1)

Généralisation du cas Musgrave : $u_t = w' X_t$, k=0, avec une hypothèse plus faible : l’écart mesurant les révisions est un processus stationnaire.

“Traduction” du critère à minimiser dans le domaine fréquentiel :

$$E(\theta' X_t - w' X_t)^2 = \int_0^{2\pi} \left| M_\theta\left(e^{i\omega}\right) - M_w\left(e^{i\omega}\right) \right|^2 dH_x(\omega)$$

$\rightarrow$ L’approche DFA (M. Wildi) consiste précisément à chercher le filtre linéaire dont la fonction de transfert $M_\theta\left(e^{i\omega}\right)$ minimise (une estimation non-paramétrique de) cette intégrale.

Le filtre dépend des données à travers de la densité spectrale H_X de la série X_t

Vers l’approche “DFA généralisé “ (Wildi) (2)

→ Permet d’isoler les effets de gains des effets de phase…

$$\left|M_\theta\left(e^{i\omega}\right)-M_w\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 =$$

$$\underbrace{\left(\rho_\theta(\omega)-\rho_w(\omega)\right)^2}_{Effet \quad de \quad Gain}+\underbrace{4\rho_w(\omega)\rho_\theta(\omega)\sin^2\left(\varphi_w(\omega)/2\right)}_{Effet \quad de \quad Phase}$$

→ DFA généralisé : pondérer différemment l’effet de phase par rapport à l’effet de gain dans le critère de minimisation.

Pondérations suggérées par M. wildi conduisent au critère “amélioré” :

$$E\left(\theta' X_t - w' X_t\right)^2 + \lambda \cdot \int_0^{2\pi} \rho_w(\omega)\cdot \Im m^2\left(M_\theta\left(e^{i\omega}\right)\right) dH_X(\omega)$$

Moyennes Mobiles : un critère pertinent pour le déphasage ? (1)

Première idée : minimiser “brutalement” la fonction de phase (en fait sa valeur absolue)

$$\varphi_\theta(\omega) = Arg\left\{\sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k e^{i\omega k}\right\} = 2 * Arctg\left(\frac{\sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k \sin(k\omega)}{\rho_\theta(\omega) + \sum_{k=-p}^{k=+f} \theta_k \cos(k\omega)}\right)$$

Mais…

- À minimiser sur une bande de fréquence (celle du cycle des affaires)
- Le critère n’est pas convexe…
- … a une expression complexe (problèmes de résolution numérique)
- Et … pas nécessairement de solution unique !

Moyennes Mobiles : un critère pertinent pour le déphasage ? (2)

Deuxième idée : Minimiser une fonction en apparence plus complexe…

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f\left[\rho_\theta(\omega), \varphi_\theta(\omega)\right] \mathrm{d}\omega$$

Où f (fonction de pénalisation) satisfait des contraintes garantissant l'optimalité des solutions… et même plus...

$$f \geq 0 \qquad f[\rho, 0] = 0 \qquad f[0, \varphi] = 0 \qquad f[\rho, \varphi] = f[\rho, -\varphi]$$

$$\partial f / \partial \rho \geq 0 \qquad \varphi \times (\partial f / \partial \varphi) \geq 0 \text{ } près \text{ } de \text{ } 0.$$

Malheureusement, le seul critère de déphasage ne fournira jamais de solution unique (si $p \geq f$, les MM "symétriques" admissibles $\left(\theta_{-p} = \theta_{-p+1} = \ldots = \theta_{-f-1} = 0 \right.$ $\left. et \text{ } \theta_{-i} = \theta_i \text{ } pour \text{ } |i| \leq f \right)$ ne produisent aucun déphasage)

Un premier critère “Timeliness”

Un premier critère intéressant

$$T(\theta) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho_\theta(\omega) \sin^2\left[\varphi_\theta(\omega)/2\right] \mathrm{d}\omega$$

Le critère est convexe à présent (mais pas strictement)

Son gradient est calculable

$\rightarrow$ Problème d’optim. convexe : On sait résoudre à l’aide d’algorithmes numériques convergents (méthode du gradient, Newton…)

Mais… pas de solution analytique

Un second critère "Timeliness"

Un critère adéquat et très pratique (testé lors de simulations)

$$T(\theta) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho_\theta^2(\omega) \sin^2[\varphi_\theta(\omega)] \mathrm{d}\omega$$

$$= \sum_{k=-p}^{+f} \sum_{l=-p}^{+f} \theta_k \theta_l \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin(k\omega) \sin(l\omega) \, \mathrm{d}\omega$$

Le critère est désormais une forme quadratique ! … mais, comme prévu, singulière (pas de solution unique, forme d'ordre p+f+1, de rang p)

Un critère composite pour concilier les objectifs

Concilier les objectifs "Fidelity", "Smoothness", "Timeliness" (on pourrait inclure les révisions) en prenant une combin. convexe des trois critères

$\rightarrow$ Critère FST, cette fois-ci strict. Convexe (D'où unicité de la solution)

$$\begin{cases} \underset{\theta}{Min}\, \theta^{'} \left[\alpha \mathrm{F} + \beta \mathrm{S} + \gamma \mathrm{T} \right] \theta \\ \text{with} \quad C\theta = a \end{cases}$$

Pour $\beta = 0$, on retrouve l'analogue - pour des filtres ne dépendant pas des données - du DFA généralisé.

Quelques résultats empiriques

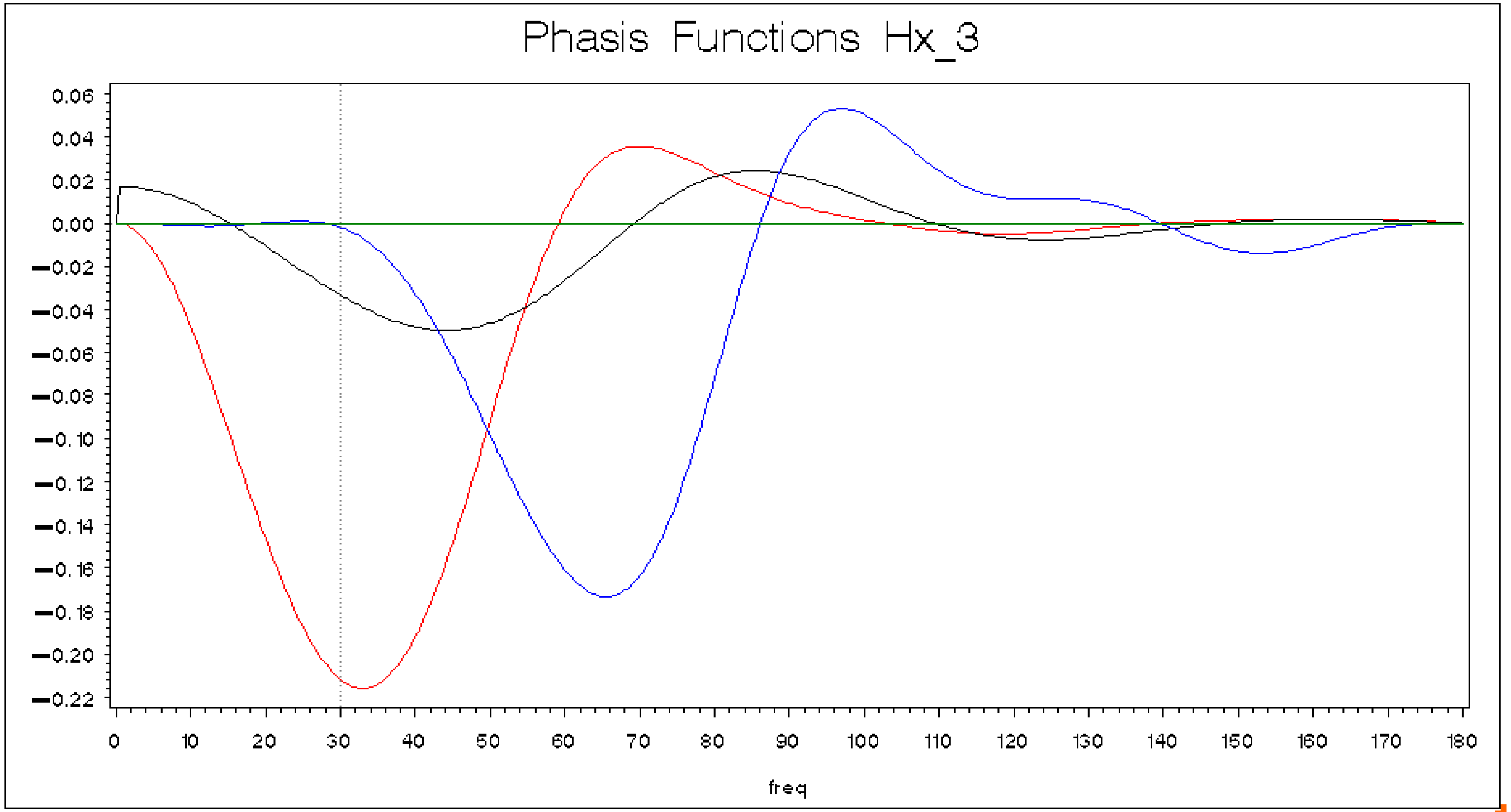
Lissage – Timeliness / Fort poids sur le critère « Timeliness »

Hx_i: MM asymétrique avec i points dans le futur (ordre 13)

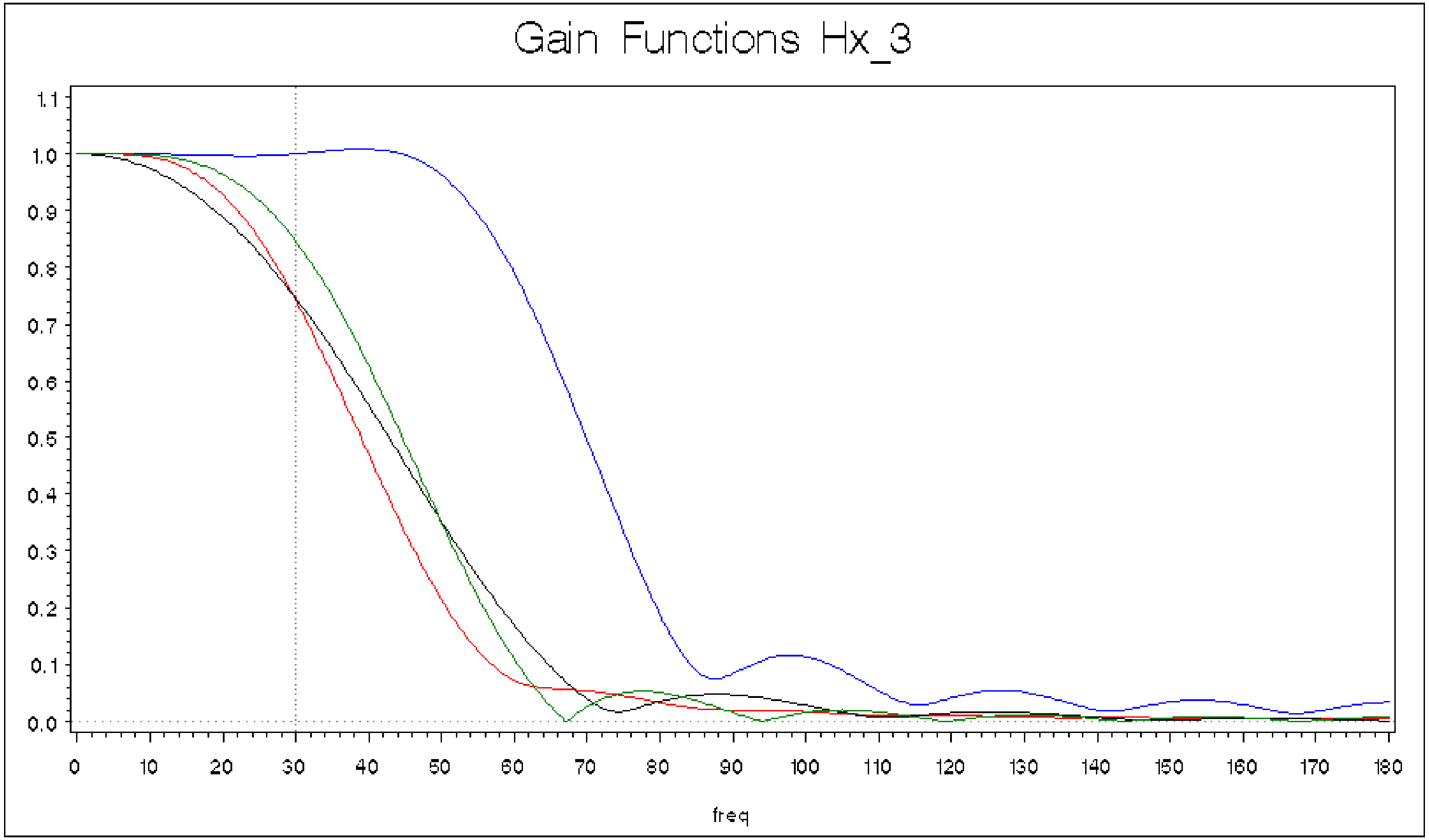
TypeMA	Criteria	Hx_0	Hx_1	Hx_2	Hx_3	Hx_4	Hx_5	H_6_6
Henderson	Fidelity	0,985	0,494	0,258	0,176	0,173	0,193	0,204
Musgrave	Fidelity	0,388	0,268	0,201	0,181	0,188	0,199	
Phase-Shift	Fidelity	1,047	0,416	0,407	0,354	0,272	0,230	
Henderson	Smoothness	0,169	0,071	0,023	0,005	0,003	0,007	0,008
Musgrave	Smoothness	1,272	0,433	0,080	0,010	0,021	0,017	
Phase-Shift	Smoothness	2,403	0,229	0,166	0,134	0,053	0,018	
Henderson	Timeliness	0,116	0,015	0,003	0,005	0,007	0,003	0
Musgrave	Timeliness	0,260	0,286	0,263	0,198	0,121	0,039	
Phase-Shift	Timeliness	2^{E}-5	0	1^{E}-6	0	0	0	

Moyennes Mobiles Hx_3 : Fonctions de Phase

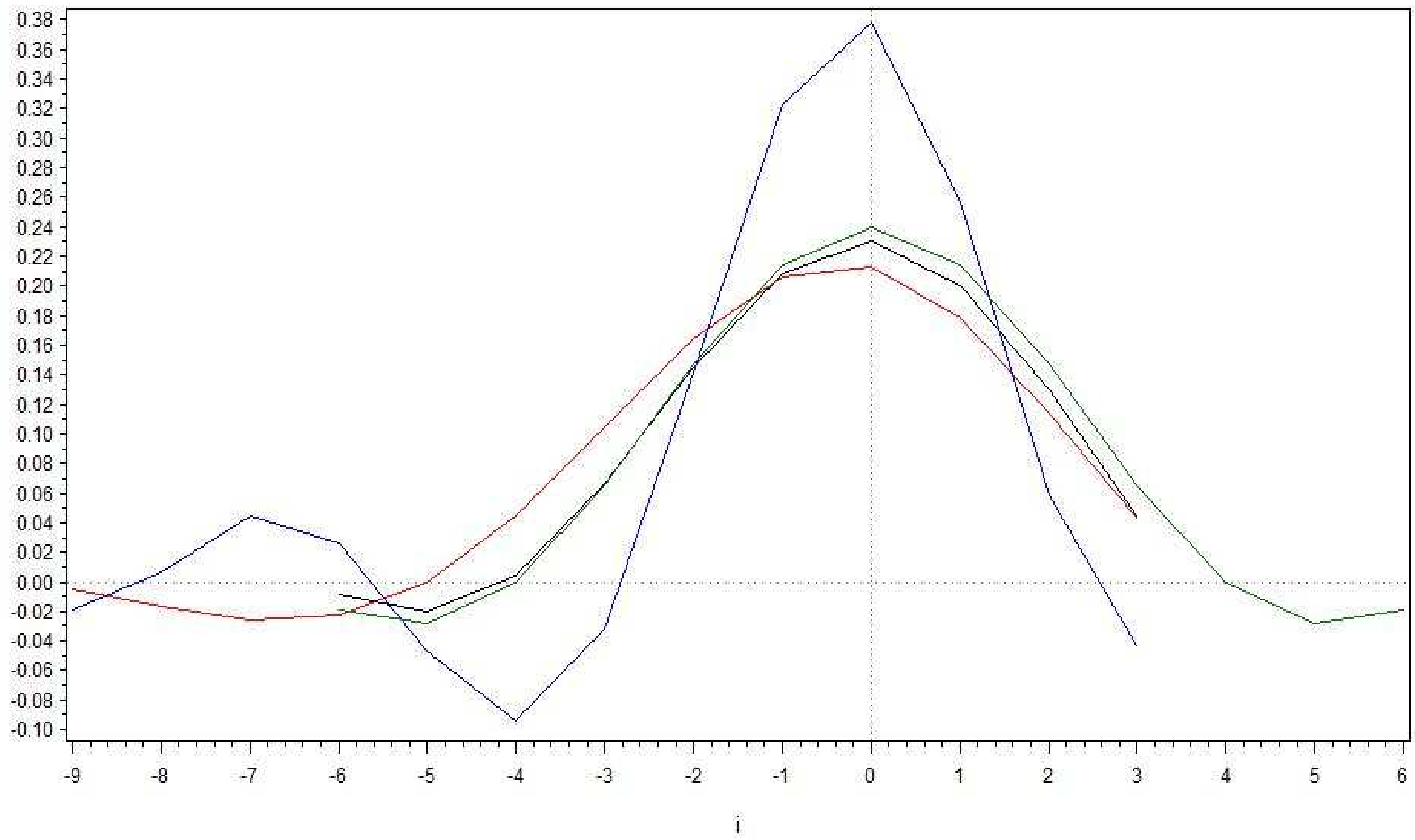
Vert: Henderson symétrique, Rouge: Henderson asymétrique, Noir: Musgrave, Bleu: Timeliness



Moyennes Mobiles Hx_3 : Fonctions de Gain

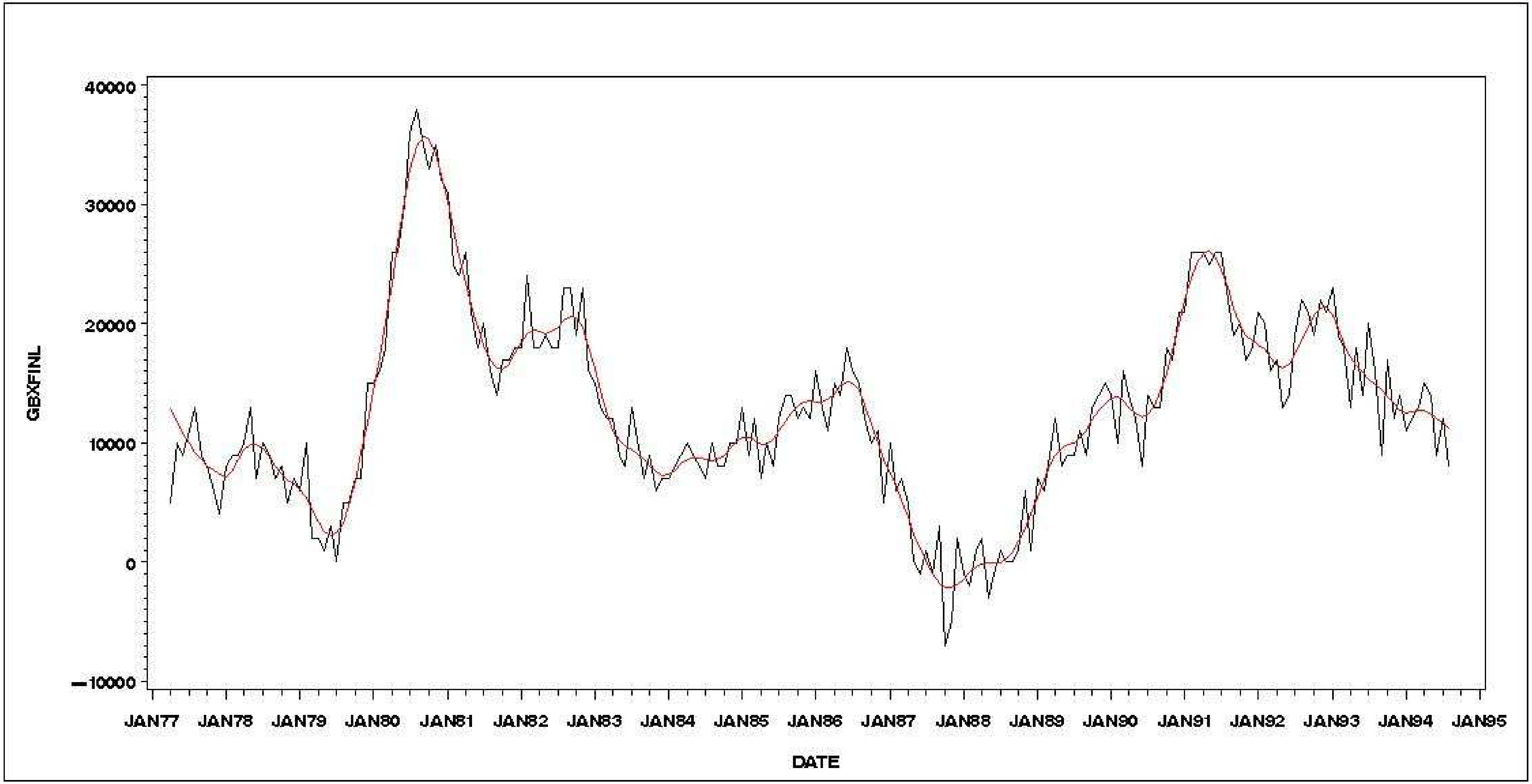


Moyennes Mobiles Hx_3 : Coefficients



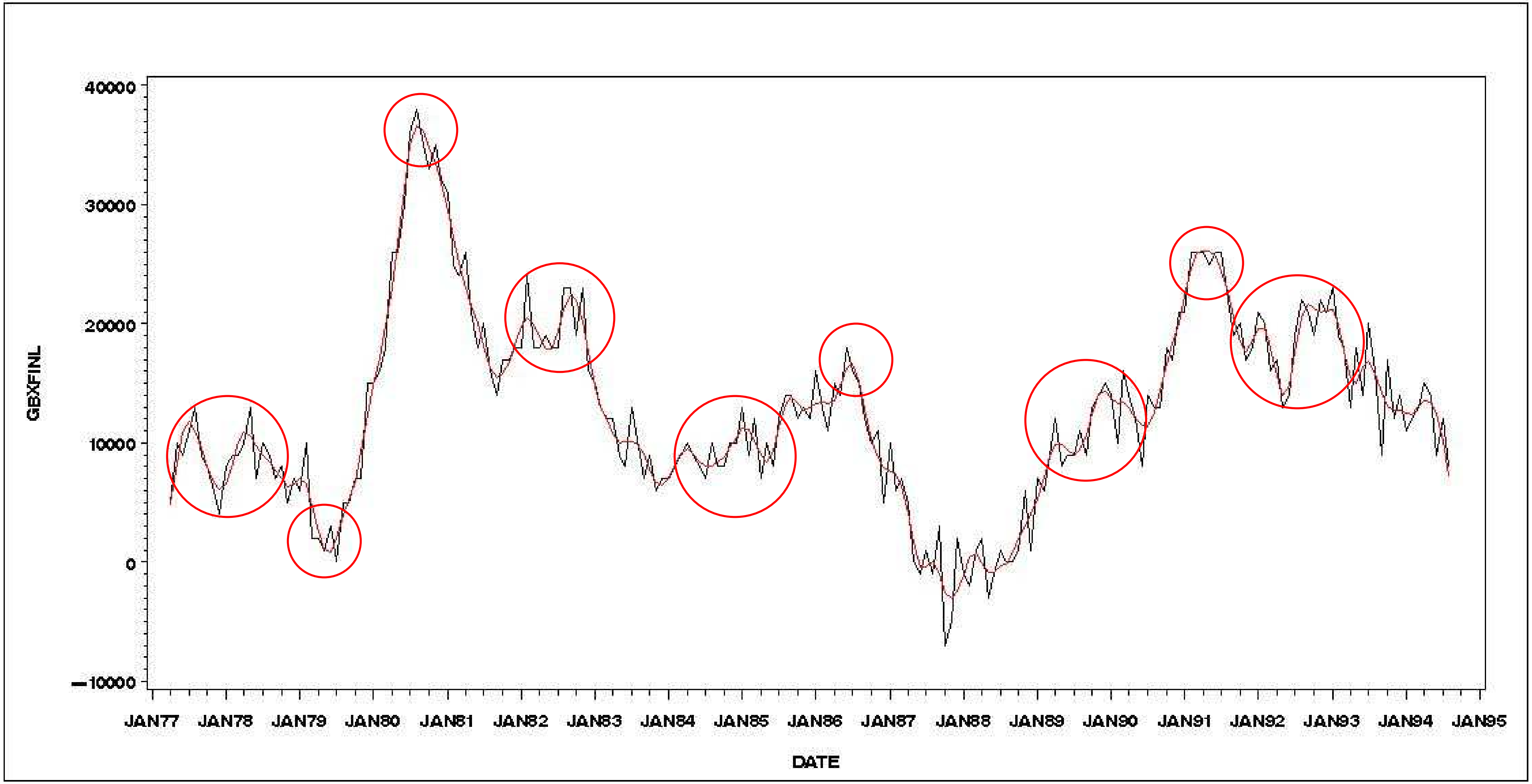
Un exemple pour finir…

Lissage par une Henderson 9-3 classique



Un exemple pour finir…

Lissage par une Henderson 9-3, avec Déphasage minimisé



Merci de votre attention !

Contact
M. Fabien Guggemos
Tél. : 00 33 1 41 17 50 18
Mail : fabien.guggemos@insee.fr