Evaluation de la capacité de mesures d'inégalité à détecter des changements dans une distribution de revenus

Matti LANGEL, Yves TILLE
Institut de Statistique,
Université de Neuchâtel, Suisse.

Abstract

Une étude de simulation est réalisée afin d'évaluer la capacité de dix-sept différentes mesures d'inégalités à détecter des changements dans une distribution de revenus. Les résultats mettent en évidence l'intérêt des mesures basées sur les *quantile shares* ainsi que l'apport de nouvelles mesures comme l'indice de Zenga ou le Average Share Ratio (ASR).

Introduction

La littérature propose une multitude de différentes mesures synthétiques permettant de rendre compte des inégalités au sein d'une distribution. Les plus récurrentes sont sans doute l'indice de Gini, le Quintile Share Ratio (QSR), l'indice d'Atkinson et celui de Theil. Ces indices et leurs propriétés ont été largement étudiés et utilisés, notamment pour quantifier les inégalités dans la distribution du revenu au sein d'une population [5, 6, 8, 10, 11].

Une dimension importante de la problématique des inégalités est la capacité d'une mesure à détecter des petits changements dans la distribution, ceci permettant d'offrir des éléments de réponse aux questions cruciales de la diminution ou de l'augmentation des inégalités. Il peut s'agir simplement d'analyser s'il y a eu un changement dans le niveau d'inégalités d'une distribution au cours du temps ou d'étudier, par exemple, le véritable impact d'une mesure politique visant à réduire les inégalités de revenu.

Nous présentons une étude de simulations réalisée sur la distribution de revenus du canton de Neuchâtel afin de comparer la réaction aux changements dans la distribution d'un large panel d'indices d'inégalités. Outre les mesures les plus courantes, plusieurs nouveaux indices sont présentés. Afin de rendre compte de la capacité des indices à détecter des changements, des perturbations de quatre types ont été affectés à la distribution : des changements qui concernent tous les revenus et des changements qui concernent seulement des parties de la distribution (hauts revenus, bas revenus et revenus intermédiaires respectivement). La réaction de chaque indice aux différents types de changement entre la distribution d'origine et la distribution perturbée est ensuite établie. Une attention particulière est apportée à l'analyse des indicateurs de Laeken (Gini et QSR) utilisés par Eurostat au sein du projet EU-SILC, ainsi qu'à la question de la robustesse.

Les mesures d'inégalités et leurs expressions en population finie sont présentées dans la première partie. Les différentes perturbations proposées sont, elles, détaillées dans la partie 2. La troisième partie décrit la méthode utilisée lors des simulations. Les résultats sont présentés et analysés dans l'ultime partie.

1 Indices d'inégalités

Il est impossible de dresser une liste exhaustive de toutes les mesures d'inégalités existantes. On peut envisager, par contre, de grouper les mesures par types, en fonction des différents paradigmes sur lesquels ils sont fondés. Il est également important de souligner le fait que ces différents types d'indices mesurent souvent différents aspects de la question des inégalités. Pour cette étude de simulation, nous nous sommes concentrés sur dix-sept mesures qui représentent un large panel du traitement quantitatif de l'inégalité et qui contient les indices les plus utilisés dans la littérature et dans la pratique. Les expressions (1) à (17) décrivent tous ces indices en population finie.

Les indices ci-dessous sont exprimés pour une population finie U de taille N. Le revenu de l'observation i est définie par y_i. La distribution de revenus est supposée ordrée, i représente donc également le rang de l'observation. Considérant Q_p, le p-ième quantile de la distribution, on a également :

$$Y = \sum_{i=1}^{N} y_i, \quad \overline{Y} = \frac{Y}{N}, \quad Var(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{Y})^2,$$

$$S_p^+ = \sum_{y_i \geq Q_p} y_i, \quad S_p^- = \sum_{y_i \leq Q_p} y_i.$$

1.1 Indice de Gini

Sans doute l'indice d'inégalité le plus célèbre et le plus traité dans la littérature [9], l'indice de Gini est également l'un des deux indicateurs d'inégalité de Laeken.

$$Gini = \frac{2\sum_{i=1}^{N} i y_i}{N\sum_{i=1}^{N} y_i} - \frac{1}{N} - 1. \tag{1}$$

1.2 Coefficient de variation

Le coefficient de variation est une mesure de dispersion relative. Il peut aussi être utilisé pour mesurer le niveau d'inégalités.

$$CV = \frac{\sqrt{Var(y)}}{\overline{Y}}. \tag{2}$$

1.3 Indices d'Atkinson

Anthony B. Atkinson a développé une mesure largement répandue [2, 3, 7], dont la forme générale peut s'écrire :

$$A_\alpha = \begin{cases} 1 - \left[\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{y_i}{\overline{Y}}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, & \text{si} \quad \alpha \neq 1, \\ 1 - \displaystyle\prod_{i=1}^{N}\left(\dfrac{y_i}{\overline{Y}}\right)^{\frac{1}{N}}, & \text{si} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

A l'aide de l'utilisation de la moyenne généralisée,

$$M^\alpha = \begin{cases} \sqrt[\alpha]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \left(\prod_{i=1}^{N} y_i\right)^{\frac{1}{N}} & \text{si } \alpha = 0, \end{cases}$$

l'indice d'Atkinson peut s'exprimer par :

$$A_\alpha = \frac{M^1 - M^{1-\alpha}}{M^1} = 1 - \frac{M^{1-\alpha}}{M^1}.$$

L'indice d'Atkinson est donc fonction du paramètre α. Pour cette étude, nous avons utilisé l'indice pour deux valeurs du paramètre : $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 1$:

$$A_{1/2} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{y_i}\right)^2}{\overline{Y}}, \tag{3}$$

$$A_1 = 1 - \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i}{\overline{Y}}\right)^{\frac{1}{N}} = 1 - \frac{G}{\overline{Y}}, \tag{4}$$

avec G, la moyenne géometrique :

$$G = \left(\prod_{i=1}^{N} y_i\right)^{\frac{1}{N}}.$$

1.4 Quantile Share Ratios

Les mesures basées sur les *quantile shares* forment une catégorie importante au sein des mesures d'inégalités. Leur construction est simple à condition de pouvoir estimer les quantiles de manière adéquate. L'indice le plus courant de cette classe est le Quintile Share Ratio (QSR), qui est également le deuxième indicateur d'inégalités de Laeken [15, 19]. En plus de cette mesure, nous évaluerons également le Decile Share Ratio (DSR) et le Median Share Ratio (MSR). Enfin, nous proposons une nouvelle mesure d'inégalité, le Average Share Ratio (ASR) qui est construit comme une moyenne harmonique de tous les ratios de *quantile shares*.

$$QSR = \frac{S_{80}^{+}}{S_{20}^{-}}, \tag{5}$$

$$DSR = \frac{S_{90}^{+}}{S_{10}^{-}}, \tag{6}$$

$$MSR = \frac{S_{50}^{+}}{S_{50}^{-}}, \tag{7}$$

$$ASR = \frac{N}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{\sum_{i=1}^{j} y_i}{\sum_{i=N-j+1}^{N} y_i}}. \tag{8}$$

1.5 Indice de Zenga

L'indice de Zenga, proposé par Michele Zenga [23], est fondé sur des ratios de moyennes arithmétiques. Il a été initialement proposé pour des données groupées, mais on peut envisager une expression pour le cas non-groupé :

$$Z = 1 - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\overline{Y}_j^{-}}{\overline{Y}_j^{+}}, \tag{9}$$

avec

$$\overline{Y}_j^{-} = \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} y_i \quad \text{et} \quad \overline{Y}_j^{+} = \frac{1}{N-j+1}\sum_{i=j}^{N} y_i.$$

1.6 Entropie généralisée

La classe des indices basés sur l'entropie est dominée dans la littérature par l'indice de Theil [22]. On peut montrer que cet indice est un cas particulier des mesures d'entropie généralisée, ainsi que des mesures basées sur la divergence de Renyi. On peut exprimer l'entropie généralisée [10, 18] par :

$$GE_\alpha = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{y_i}{Y})^\alpha - 1}{\alpha(\alpha-1)}.$$

Trois différentes valeurs du paramètre α ont été testées ici : 0.5, 1 (limite quand α tend vers 1) et 2. Le premier cas ($D_{1/2}$) est une expression voisine de la distance de Hellinger [12], le second (T) est l'indice de Theil [7, 22], alors que le troisième (D_2) est similaire à la distance du χ^2 [16] et à l'indice de concentration de Herfindahl-Hirschman [1, 13] :

$$GE_{1/2} = 4\left(1 - \sum_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{y_i}{NY}}\right), \tag{10}$$

$$GE_1 = T = \sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{Y}\log\frac{Ny_i}{Y}, \tag{11}$$

$$GE_2 = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2}{\overline{Y}^2} - \frac{1}{2}. \tag{12}$$

1.7 Divergence de Renyi

Les indices de la catégorie de la divergence de Renyi sont, à une transformation près, des cas particuliers de la divergence généralisée de Leibler-Kullback [20] :

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha-1}\log N^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i}{Y}\right)^\alpha.$$

On retrouve l'indice de Theil lorsque α tend vers 1 [14]. Pour cette étude de simulations, deux autres mesures ont été retenues : $\alpha = 1/2$ ($R_{1/2}$) and $\alpha = 2$ (R_2).

$$R_{1/2} = -2\log\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{y_i}{NY}}. \tag{13}$$

$$R_2 = \log N\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2}{Y^2}. \tag{14}$$

1.8 Rapports Interquantiles

La dernière classe proposée concerne les rapports de quantile, à ne pas confondre avec les rapports de *quantile shares*. Les cas particuliers que sont le rapport interquartile (IQR) et le rapport interdécile (IDR) sont présentés ici car on les retrouve fréquemment dans la littérature sur les inégalités [par exemple 17, 21]. Nous proposons également une nouvelle mesure, le Mean Quantile Ratio (MQR).

$$IQR = \frac{Q_{75}}{Q_{25}}, \tag{15}$$

$$IDR = \frac{Q_{90}}{Q_{10}}, \tag{16}$$

$$MQR = \frac{N}{2\sum_{i=1}^{N/2}\frac{y_i}{y_{N-i+1}}}. \tag{17}$$

2 Perturbations de la distribution

La base de données utilisée dans le cadre de ces simulations est la distribution du revenu des ménages du canton de Neuchâtel en Suisse pour l'année 2007. Il contient 88 011 revenus non nuls. Les échantillons sont tirés au sein de deux populations : la population A (distribution originale), et population B (distribution ayant subie une perturbation). Pour chaque simulation, un échantillon de 1000 observations est sélectionné dans chaque population. L'échantillon issu de la population A est noté S_A et l'échantillon issu de la population B est noté S_B. Les échantillons sont sélectionnés à l'aide d'un plan simple sans remise.

La capacité a détecter des changements a été évaluée sur les dix-sept mesures énumérées dans la section précédente, dans une dizaine de situations différentes, impliquant des perturbations à différents niveaux de la distribution. Afin d'obtenir quelques indications concernant la robustesse des mesures, une situation supplémentaire (la présence d'un revenu très anormalement élevé) a été également simulée. On note A, la distribution de revenu initiale, et B, la même distribution après qu'elle ait subie une perturbation. Ces perturbations sont présentées ci-dessous.

2.1 Changements en haut de la distribution

1. *Plafonnement des hauts revenus.* Nivellement de tous les revenus supérieurs à Q_{90} au revenu de Q_{90}.

2. *Doublement des très hauts revenus.* Doublement du revenu des 5% les plus riches.

3. *Réductions des très hauts revenus.* Réduction de moitié du revenu des 5% les plus riches.

2.2 Changements sur toute la distribution

4. *Translation.* Ajout d'un revenu fixe de CHF 10'000 a toutes les observations.

5. *Reduction de la dispersion de la distribution.* On retranche 10% à tous les revenus, puis on les augmente de 10% du revenu moyen :

$$y_{i_B} = 0.9 y_{i_A} + 0.1 \overline{Y}_A.$$

   Cette opération a l'avantage de réduire la dispersion sans modifier le total.

6. *Revenus après imposition.* La base de données à disposition propose le revenu imposable ainsi que le montant de la taxation auquel est soumis le contribuable. Il est ainsi possible de connaître directement le revenu après taxation pour chaque observation.

2.3 Changements au bas de la distribution

7. *Revenu minimum garanti.* Pour cette simulation, tous les plus bas revenus ont été nivelés à un revenu égal à 30% du revenu médian.

8. *Augmentation des plus bas revenus.* Le revenu des 5% les plus pauvres est multiplié par 10.

9. *Diminution des plus bas revenus.* Le revenu des 5% les plus pauvres est divisé par 10.

2.4 Changement au milieu de la distribution

10. *Réduction de la dispersion au centre de la distribution.* Pour cette situation isolée, 40% des observations ont été modifiées (20% au dessus de la médiane, 20% en dessous). Ici, les revenus concernés sont divisés par 10, puis augmentés de 90% du revenu moyen.

$$y_{i_B} = \begin{cases} 0.1 y_{i_A} + 0.9 \overline{Y}_A, & \text{si } Q_{30} \leq y_{i_A} \leq Q_{70} \\ y_{i_A}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.5 Evaluation de la robustesse

11. *Forte perturbation d'une seule observation.* Un revenu sélectionné aléatoirement a été multiplié par dix mille. Contrairement aux autres cas, cette perturbation est effectuée sur les échantillons S_B, et non sur la population B, de telle sorte que tous les échantillons S_B contiennent une valeur aberrante.

3 Méthode de simulations

La capacité de chacune des mesures (présentées dans la section 1) à détecter des changements dans la distribution est étudiée pour chacun des dix types de perturbations à l'aide de 10'000 simulations. Tous les indices sont calculés pour chaque échantillon. Etant donné que les échantillons S_A et S_B d'une même simulation sont indépendants et de même taille, on peut analyser la statistique suivante :

$$z = \left| \frac{\overline{\widehat{I_B}} - \overline{\widehat{I_A}}}{\sqrt{Var(\widehat{I_A}) + Var(\widehat{I_B})}} \right|,$$

où $\widehat{I_A}$ et $\widehat{I_B}$ représentent respectivement l'indice d'inégalité calculé sur S_A et sur S_B. $\overline{\widehat{I_A}}$ et $Var(\widehat{I_A})$ représentent respectivement la moyenne et la variance de l'indice I sur les 10'000 simulations des échantillons de la population A. Une notation correspondante est utilisée pour la population B. Sous l'hypothèse d'indépendance entre S_A et S_B, la variance de $\overline{\widehat{I_B}} - \overline{\widehat{I_A}}$ peut être exprimée simplement par :

$$Var(\widehat{I_B} - \widehat{I_A}) = Var(\widehat{I_A}) + Var(\widehat{I_B}).$$

Cette statistique nous donne des indications sur la capacité de chaque indice à détecter le changement dans la distribution de revenus entre la population A et la population B.

4 Résultats et analyse

Le tableau 1 récapitule la valeur de z pour chaque indice et pour chacune des perturbations de la distribution. On peut en déduire quelques pistes intéressantes pour mesurer les inégalités de revenus.

Aux vues de ces résultats, trois catégories de mesures (regroupant un total de huit indices) semblent se démarquer par leur relative incapacité à détecter les changements proposés : tous les indices liés à l'entropie (Theil, entropie généralisée, divergence de Renyi), les rapports interquantiles simples (IQR et IDR) et le coefficient de variation (CV), mesure liée directement à la variance. On peut noter que les rapports interquantiles sont, logiquement, insensibles à la présence d'une valeur aberrante mais détectent relativement bien les perturbations touchant toute la distribution. En revanche, il est évident que ces mesures sont totalement inefficaces pour détecter des changements aux extrémités.

L'un des résultats principaux que nous souhaitons souligner est la qualité, contrairement à ce que l'on aurait pu penser pour des mesures calculées sur des queues de distribution, des indices basés sur les *quantile shares*. Tous les rapports de *quantile shares* semblent rendre compte efficacement des changements dans la distribution, tout en conservant une certaine robustesse en comparaison d'autres mesures comme la familles des indices d'Atkinson, le coefficient de Gini ou l'indice de Zenga. La performance du QSR semble montrer que sa sélection comme indice de Laeken a été un bon choix. On peut tout de même noter que le MSR, peu utilisé, semble être une mesure très polyvalente.

L'autre indicateur de Laeken, l'indice de Gini, a été largement étudié dans la littérature [4]. Nos simulations ont montré que l'indice de Gini produit globalement des résultats moyens, mais il est l'une des mesures les plus sensibles dans la détection de changements au sommet de la distribution. D'une part, on constate que si le choix des indicateurs de Laeken n'est pas optimal, il semble largement

Table 1: Résumé des résultats de simulation. Le tableau 1 détaille la valeur de la statistique z pour chacun des 17 indices sur chacune des 11 perturbations. Pour chaque cas, la valeur de z indique la capacité de l'indice à détecter la modification entre les distributions A et B. Une valeur élevée indique une forte capacité à déceler le changement entre les deux distributions. La plus forte valeur de z pour chaque perturbation est encadrée. Pour le cas 11 cependant, une faible valeur de z indique une plus forte robustesse par rapport à une valeur aberrante.

	Perturbations (statistique z)										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Gini	3.52	2.86	2.53	2.67	1.76	0.78	0.75	1.01	0.14	1.49	5.52
CV	1.01	0.78	0.65	0.28	0.20	0.12	0.04	0.07	0.01	0.12	5.40
$A_{1/2}$	2.37	2.28	1.72	2.19	1.54	0.55	0.99	1.04	0.51	0.50	5.31
A_1	2.29	2.47	1.77	4.24	$\boxed{3.14}$	0.78	2.58	2.43	$\boxed{2.34}$	0.41	5.48
QSR	2.21	2.12	1.81	4.10	2.92	0.97	2.29	2.34	0.43	0.01	0.96
DSR	2.11	1.93	1.50	3.79	2.96	0.72	$\boxed{3.49}$	$\boxed{2.79}$	0.92	0.01	0.91
MSR	2.51	2.33	2.12	3.52	2.37	1.02	0.90	1.45	0.16	3.13	0.99
ASR	3.03	2.49	2.30	3.16	2.11	0.84	1.20	1.34	0.22	1.46	1.24
Z	$\boxed{4.19}$	$\boxed{2.88}$	$\boxed{2.55}$	3.90	2.61	0.89	2.08	1.80	0.35	1.34	6.33
$GE_{1/2}$	2.32	2.22	1.69	2.17	1.52	0.55	0.98	1.02	0.50	0.49	4.13
T	1.71	1.59	1.21	0.99	0.68	0.31	0.31	0.38	0.10	0.34	4.74
GE_2	0.47	0.39	0.34	0.14	0.12	0.07	0.01	0.03	0.01	0.06	3.77
$R_{1/2}$	2.28	2.16	1.67	2.14	1.50	0.54	0.96	1.01	0.50	0.48	3.00
R_2	1.18	1.03	0.73	0.32	0.23	0.14	0.05	0.08	0.01	0.14	8.45
IQR	0.00	0.01	0.38	3.43	2.27	0.95	0.00	1.39	0.01	0.01	$\boxed{0.00}$
IDR	0.08	0.01	0.71	3.72	2.59	0.84	0.84	2.25	0.00	0.01	0.01
MQR	0.12	0.06	0.45	$\boxed{4.70}$	3.06	$\boxed{1.18}$	0.77	2.03	0.14	$\boxed{5.97}$	$\boxed{0.00}$

supérieur à nos attentes. On remarque, d'autre part, que le QSR est plus puissant, mais aussi plus robuste que l'indice de Gini.

Les deux indices d'Atkinson se comportent très différemment. En effet, Atkinson(α=0.5) ne parvient pas à détecter les perturbations touchant tous les individus, alors que Atkinson(α=1) semble être l'une des meilleurs mesures sur l'ensemble des situations. Il doit donc être pris en considération malgré un inconvénient de taille : étant construit par une moyenne géométrique, il prend la valeur 1 (censée représenter l'inégalité parfaite) sitôt qu'un revenu nul est inclus dans la distribution.

Cette étude de simulation met en évidence le fait que, malgré le très grand nombre d'indices d'inégalités existants, de nouvelles ou récentes mesures semblent être capables d'apporter de sensibles améliorations quant à l'analyse quantitative des inégalités. L'indice de Zenga est indiscutablement la mesure la plus polyvalente, donnant de bons résultats dans toutes les situations. Malgré le problème de robustesse, c'est une mesure qui mérite une attention particulière dans le cadre de la recherche sur les inégalités. Le MQR est, lui, nettement supérieur aux autres mesures basés sur les rapports de quantiles. En plus de sa robustesse, il détecte bien la plupart des changements, à l'exception de ceux concernant les plus hauts revenus. Enfin, le ASR semble presque aussi robuste que les autres mesures basées sur les *quantile shares*, mais est plus efficace pour détecter les perturbations au sommet de la distribution. De plus, il est compétitif en ce qui concerne les modifications au centre de la distribution, là où le QSR et le DSR sont inutiles.

Si la question de la robustesse mérite une étude plus approfondie, on peut quand même remarquer ici deux catégories. Les mesures robustes, tout d'abord, regroupent toutes les mesures construites à l'aide de quantiles (rapports interquantiles et rapport de *quantile shares*). Les 10 autres indices se montrent beaucoup plus sensibles aux valeurs extrêmes. Ceci montre toute l'attention qu'il faut porter aux mesures fondées sur les quantiles, et notamment à note nouvelle mesure, le ASR, qui semble être le plus performant de la catégorie.

Conclusion

Mesurer les changements dans une distribution de revenus est un objectif majeur de la recherche sur les inégalités. Cette étude de simulations sur des données réelles nous donne des indications sur les mesures particulièrement adaptées à cette problématique. Nous avons montré que les indices basés sur les *quantile shares* forment une catégorie de mesures très pertinentes, et que l'indice d'Atkinson est une mesure très compétitive sous des conditions malheureusement fortes (absence de revenus nuls et de valeurs aberrantes).

Le très utilisé indice de Gini détecte les changements de manière relativement acceptable, mais se révèle moins puissant que les mesures de *quantile shares*. Nous soulignons également l'incapacité des mesures d'entropie à rendre compte des changements, ainsi que l'intérêt pour des nouvelles mesures comme l'indice de Zenga, le ASR ou le MQR. Une étude plus complète de la robustesse de ces indices s'impose désormais, ainsi que la question de leur estimation dans des plans de sondage complexes.

Remerciements

Les auteurs remercient l'Office cantonale de la statistique du canton de Neuchâtel, et tout particulièrement Gérard Geiser, pour nous avoir donné accès à la base de données utilisée dans les simulations. Les auteurs remercient également Monique Graf (Office fédéral de la statistique, Suisse), Lionel Qualité et Anthea Monod (Université de Neuchâtel) pour leurs remarques et commentaires constructifs.

References

[1] W. Acar and K. Sankaran. The myth of the unique decomposability: Specializing the Herfindahl and entropy measures? *Strategic Management Journal*, 20(10):969–975, 1999.

[2] P. D. Allison. Measures of inequality. *American Sociological Review*, 43(6):865–880, 1978.

[3] A. B. Atkinson. On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, 2:244–263, 1970.

[4] R. L. Basmann and D. J. Slottje. A new index of income inequality. the B measure. *Economics Letters*, 24:385–389, 1987.

[5] M. Beblo and T. Knaus. Measuring income inequality in Euroland. Technical report, Centre for European Economic Research, 2000.

[6] F. Bourguignon. Decomposable income inequality measures. *Econometrica*, 47(4):901–920, 1979.

[7] P. B. Coulter. *Measuring Inequality.* Boulder, Westview Press, 1989.

[8] F. A. Cowell. Inequality decomposition : Three bad measures. *Bulletin of Economic Research*, 40(4):309–311, 1988.

[9] F. A. Cowell. *Measurement of Inequality.* Atkinson et Bourguignon North Holland, 2000.

[10] F. A. Cowell. Theil, inequality indices and decomposition. *Research on Economic Inequality*, 13:345–360, 2006.

[11] M. Dayioglu and C. Baslevent. A subgroup decomposition of the Atkinson index: Imputed rents and regional income inequality in Turkey. Technical report, Department of Economics, Middle East Technical University Ankara, 2005.

[12] A. L. Gibbs and F. Su. On choosing and bounding probability metrics. *International Statistical Review*, 70(3):419–435, 2002.

[13] A. Hirschman. The paternity of an index. *The American Economic Review*, 54(5):761, 1964.

[14] S. Kullback and R. A. Leibler. On information and sufficiency. *The annals of Mathematical Statistics*, 22 (1):79–86, 1951.

[15] E. Leiten and I. Traat. *Variance of Laeken indicators in complex surveys.* Tallinn: Statistical Office of Estonia, 2005.

[16] B. Lindsay. Efficiency versus robustness: The case for minimum Hellinger distance and related methods. *The Annals of Statistics*, 22(2):1081–1114, 1994.

[17] P. Merle and Z. Andreyev. Democratization or increase in educational inequality? changes in the length of studies in France, 1988-1998. *Population*, 57(4/5):631–657, 2002.

[18] S. Mussard, F. Seyte, and M. Terraza. Decomposition of Gini and the generalized entropy inequality measures. *Economics Bulletin*, 4(7):1–6, 2003.

[19] G. Osier. Variance estimation: the linearization approach applied by Eurostat to the 2004 SILC operation. Technical report, Eurostat and Statistics Finland Methodological Workshop on EU-SILC, Helsinki, 7-8 November 2006, 2006.

[20] A. Renyi. On measures of entropy and information. In *4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 1, pages 547–561, 1961.

[21] J. Stoetzel. Le cours de la vie selon la condition sociale: Une étude des revenus selon l'âge dans les diverses professions. *Revue Française de Sociologie*, 21(2):155–170, 1980.

[22] H. Theil. *Economics and Information Theory.* Rand McNally, 1967.

[23] M. Zenga. Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means. *Statistica e Applicazioni*, 5(1), 2007.