Nouvelles mesures de dépendance pour une modélisation alpha-stable.

Bernard GAREL & Bernédy KODIA

Institut de Mathématiques de Toulouse
et INPT-ENSEEIHT

X^{èmmes} Journées de Méthodologie Statistique de l'Insee
Paris, 24 mars 2009

Plan de la présentation

Plan de la présentation

Plan de la présentation

Plan

1. Introduction : Des lois,..., des noms
2. Quelques coefficients de dépendance
3. Coefficient de covariation symétrique signé
   - Estimation du nouveau coefficient

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\Big\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sign}(\theta) w(\theta, \alpha)\right] + i\delta\theta \Big\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha|\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta,\alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- **Caractérisation** : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- **Fonction caractéristique** :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sign}(\theta) w(\theta, \alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

▸ $w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta,\alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

  - Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
  - Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
  - Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\Big\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta,\alpha)\right] + i\delta\theta \Big\},$$

où $0 < \alpha \le 2$, $\gamma \ge 0$, $-1 \le \beta \le 1$ et δ réel.

$w(\theta,\alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta, \alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta, \alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta,\alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta, \alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{sign}(\theta) w(\theta, \alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.

Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta,\alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

▸ $w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\left[1 + i\beta \operatorname{sign}(\theta) w(\theta,\alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

▸ $w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta,\alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Un premier nom : Paul Lévy en 1924.

- Caractérisation : Les lois stables sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
- Fonction caractéristique :

$$E \exp i\theta X = \exp\left\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta, \alpha)\right] + i\delta\theta \right\},$$

où $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel.

$w(\theta, \alpha)$

Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable.
Exemples de lois stables :

- Loi de Lévy ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$)
- Loi de Cauchy ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)
- Loi de Gauss ($\alpha = 2$)

Les lois stables et leur caractérisation

Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie Γ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur δ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^2$:

$$E\exp\left(i\langle\theta, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\theta, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \left[1 + i\,\mathrm{sign}\langle\theta, \mathbf{s}\rangle w(\langle\theta, \mathbf{s}\rangle, \alpha)\right] \Gamma(d\mathbf{s}) + i\langle\theta, \delta\rangle \right\}.$$

Ici $\langle\theta, \mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. La mesure Γ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple (Γ, δ) est unique.
Le vecteur est symétrique si et seulement si $\delta = 0$ et Γ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E\exp\{i\langle\theta, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\theta, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \Gamma(d\mathbf{s})\right\}.$$

Les lois stables et leur caractérisation

Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie $\mathbf{\Gamma}$ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur δ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^2$:

$$E \exp\left(i\langle\theta, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\theta, \mathbf{s}\rangle|^{\alpha} \left[1 + i\,\mathrm{sign}\langle\theta, \mathbf{s}\rangle w(\langle\theta, \mathbf{s}\rangle, \alpha)\right] \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) + i\langle\theta, \delta\rangle\right\}.$$

Ici $\langle\theta, \mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. La mesure $\mathbf{\Gamma}$ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple $(\mathbf{\Gamma}, \delta)$ est unique.

Le vecteur est symétrique si et seulement si $\delta = 0$ et $\mathbf{\Gamma}$ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\{i\langle\theta, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\theta, \mathbf{s}\rangle|^{\alpha} \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})\right\}.$$

Les lois stables et leur caractérisation

Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie $\mathbf{\Gamma}$ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur $\boldsymbol{\delta}$ tels que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$:

$$E\exp\left(i\langle\theta,\mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\theta,\mathbf{s}\rangle|^{\alpha}\left[1 + i\,\mathrm{sign}\langle\theta,\mathbf{s}\rangle w(\langle\theta,\mathbf{s}\rangle,\alpha)\right]\mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) + i\langle\theta,\delta\rangle\right\}.$$

Ici $\langle\theta,\mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. La mesure $\mathbf{\Gamma}$ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple $(\mathbf{\Gamma},\delta)$ est unique.

Le vecteur est symétrique si et seulement si $\delta = 0$ et $\mathbf{\Gamma}$ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E\exp\{i\langle\theta,\mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\theta,\mathbf{s}\rangle|^{\alpha}\mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})\right\}.$$

Les lois stables et leur caractérisation

Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie $\mathbf{\Gamma}$ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur $\boldsymbol{\delta}$ tels que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$:

$$E \exp\left(i\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \left[1 + i\,\mathrm{sign}\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle w(\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle, \alpha)\right] \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) + i\langle\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}\rangle \right\}.$$

Ici $\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. La mesure $\mathbf{\Gamma}$ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple $(\mathbf{\Gamma}, \delta)$ est unique.

Le vecteur est symétrique si et seulement si $\delta = 0$ et $\mathbf{\Gamma}$ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\{i\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})\right\}.$$

Les lois stables et leur caractérisation

Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie $\mathbf{\Gamma}$ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur $\boldsymbol{\delta}$ tels que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$:

$$E \exp\left(i\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^{\alpha} \left[1 + i \operatorname{sign}\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle w(\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle, \alpha)\right] \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) + i\langle\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}\rangle \right\}.$$

Ici $\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. La mesure $\mathbf{\Gamma}$ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple $(\mathbf{\Gamma}, \delta)$ est unique.

Le vecteur est symétrique si et seulement si $\delta = 0$ et $\mathbf{\Gamma}$ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\{i\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^{\alpha} \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})\right\}.$$

Les lois stables et leur caractérisation

Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie $\mathbf{\Gamma}$ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur $\boldsymbol{\delta}$ tels que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$:

$$E \exp\left(i\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \left[1 + i \operatorname{sign}\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle w(\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle, \alpha)\right] \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) + i\langle\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}\rangle \right\}.$$

Ici $\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. La mesure $\mathbf{\Gamma}$ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple $(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\delta})$ est unique.

Le vecteur est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{\delta} = 0$ et $\mathbf{\Gamma}$ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\{i\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})\right\}.$$

Les lois stables et leur caractérisation

Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie $\mathbf{\Gamma}$ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur $\boldsymbol{\delta}$ tels que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$:

$$E \exp\left(i\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \left[1 + i\,\mathrm{sign}\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle w(\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle, \alpha)\right] \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) + i\langle\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}\rangle \right\}.$$

Ici $\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. La mesure $\mathbf{\Gamma}$ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple $(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\delta})$ est unique.
Le vecteur est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{\delta} = 0$ et $\mathbf{\Gamma}$ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\{i\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})\right\}.$$

Les lois stables et leur caractérisation

Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie $\mathbf{\Gamma}$ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur $\boldsymbol{\delta}$ tels que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$:

$$E \exp\left(i\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{ -\int_{S_2} |\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^{\alpha} \left[1 + i \operatorname{sign}\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle w(\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle, \alpha)\right] \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) + i\langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}\rangle \right\}.$$

Ici $\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. La mesure $\mathbf{\Gamma}$ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple $(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\delta})$ est unique.
Le vecteur est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{\delta} = 0$ et $\mathbf{\Gamma}$ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\{i\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{ -\int_{S_2} |\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^{\alpha} \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) \right\}.$$

De Mandelbrot à nos jours : les applications

Mandelbrot (1960) suggéra les lois stables comme modèles possibles des distributions de revenus et des prix spéculatifs .
Dommaines d'applications :

- Finance
- Télécommunication
- Physique, biologie, génétique...

De Mandelbrot à nos jours : les applications

Mandelbrot (1960) suggéra les lois stables comme modèles possibles des distributions de revenus et des prix spéculatifs .

Dommaines d'applications :

- Finance
- Télécommunication
- Physique, biologie, génétique...

De Mandelbrot à nos jours : les applications

Mandelbrot (1960) suggéra les lois stables comme modèles possibles des distributions de revenus et des prix spéculatifs .
Dommaines d'applications :

- Finance
- Télécommunication
- Physique, biologie, génétique...

De Mandelbrot à nos jours : les applications

Mandelbrot (1960) suggéra les lois stables comme modèles possibles des distributions de revenus et des prix spéculatifs .
Dommaines d'applications :

- Finance
- Télécommunication
- Physique, biologie, génétique...

De Mandelbrot à nos jours : les applications

Mandelbrot (1960) suggéra les lois stables comme modèles possibles des distributions de revenus et des prix spéculatifs .
Dommaines d'applications :

- Finance
- Télécommunication
- Physique, biologie, génétique...

Notre contexte : les mesures de dépendances

Pourquoi parler de nouvelle mesure de dépendance ?

- Les vecteurs aléatoires stables non gaussiens ne possendent pas de moment de segond ordre.
  - Conséquence : La matrice de corrélation n'est plus définie.
- Alternative : Définir des coefficients de dépendance basés sur des moments plus petits que 2.

Notre contexte : les mesures de dépendances

Pourquoi parler de nouvelle mesure de dépendance ?

- Les vecteurs aléatoires stables non gaussiens ne possendent pas de moment de segond ordre.
  - Conséquence : La matrice de corrélation n'est plus définie.
- Alternative : Définir des coefficients de dépendance basés sur des moments plus petits que 2.

Notre contexte : les mesures de dépendances

Pourquoi parler de nouvelle mesure de dépendance ?

- Les vecteurs aléatoires stables non gaussiens ne possendent pas de moment de segond ordre.
  - Conséquence : La matrice de corrélation n'est plus définie.
- Alternative : Définir des coefficients de dépendance basés sur des moments plus petits que 2.

Notre contexte : les mesures de dépendances

Pourquoi parler de nouvelle mesure de dépendance ?

- Les vecteurs aléatoires stables non gaussiens ne possendent pas de moment de segond ordre.
  - Conséquence : La matrice de corrélation n'est plus définie.
- Alternative : Définir des coefficients de dépendance basés sur des moments plus petits que 2.

Notre contexte : les mesures de dépendances

Pourquoi parler de nouvelle mesure de dépendance ?

- Les vecteurs aléatoires stables non gaussiens ne possendent pas de moment de segond ordre.
  - Conséquence : La matrice de corrélation n'est plus définie.
- Alternative : Définir des coefficients de dépendance basés sur des moments plus petits que 2.

Plan

Le paramètre d'association de Press

Press (1972) proposa une mesure de dépendance entre composantes d'un vecteur symétrique α-stable bivarié dont la fonction caractéristique est donnée par :

$$
\begin{aligned}
E\exp\left(i\langle\theta,\mathbf{X}\rangle\right) &= \exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}(\theta\Omega_k\theta')^{\alpha/2}\right\} \\
&= \exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}\left(w_{11}(k)\theta_1^2+2w_{12}(k)\theta_1\theta_2+w_{22}(k)\theta_2^2\right)^{\alpha/2}\right\},
\end{aligned}
$$

où $\Omega_k,\ k=1,...,m$ sont des matrices symétriques positives de dimension 2×2. Le paramètre d'association (a.p.) ρ est défini comme suit :

$$
\rho = \frac{\sum_{k=1}^{m} w_{12}(k)}{[(\sum_{k=1}^{m} w_{11}(k))(\sum_{k=1}^{m} w_{22}(k))]^{1/2}}.
$$

Le paramètre d'association de Press

Press (1972) proposa une mesure de dépendance entre composantes d'un vecteur symétrique α-stable bivarié dont la fonction caractéristique est donnée par :

$$\begin{aligned} E\exp\left(i\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{X}\rangle\right) &= \exp\Big\{-\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\Omega}_k\boldsymbol{\theta}')^{\alpha/2}\Big\} \\ &= \exp\Big\{-\sum_{k=1}^{m}\left(w_{11}(k)\theta_1^2+2w_{12}(k)\theta_1\theta_2+w_{22}(k)\theta_2^2\right)^{\alpha/2}\Big\}, \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\Omega}_k,\ k=1,...,m$ sont des matrices symétriques positives de dimension 2×2. Le paramètre d'association (a.p.) ρ est défini comme suit :

$$\rho=\frac{\sum_{k=1}^{m}w_{12}(k)}{[(\sum_{k=1}^{m}w_{11}(k))(\sum_{k=1}^{m}w_{22}(k))]^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association de Press

Press (1972) proposa une mesure de dépendance entre composantes d'un vecteur symétrique α-stable bivarié dont la fonction caractéristique est donnée par :

$$E \exp\left(i\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\Omega}_k\boldsymbol{\theta}')^{\alpha/2} \right\}$$
$$= \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{m} \left(w_{11}(k)\theta_1^2 + 2w_{12}(k)\theta_1\theta_2 + w_{22}(k)\theta_2^2\right)^{\alpha/2} \right\},$$

où $\boldsymbol{\Omega}_k,\ k = 1, ..., m$ sont des matrices symétriques positives de dimension 2×2. Le paramètre d'association (a.p.) ρ est défini comme suit :

$$\rho = \frac{\sum_{k=1}^{m} w_{12}(k)}{[(\sum_{k=1}^{m} w_{11}(k))(\sum_{k=1}^{m} w_{22}(k))]^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association de Press

Press (1972) proposa une mesure de dépendance entre composantes d'un vecteur symétrique α-stable bivarié dont la fonction caractéristique est donnée par :

$$\begin{aligned} E\exp\left(i\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{X}\rangle\right) &= \exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\Omega}_k\boldsymbol{\theta}')^{\alpha/2}\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}\left(w_{11}(k)\theta_1^2+2w_{12}(k)\theta_1\theta_2+w_{22}(k)\theta_2^2\right)^{\alpha/2}\right\}, \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\Omega}_k,\ k=1,...,m$ sont des matrices symétriques positives de dimension 2×2. Le paramètre d'association (a.p.) ρ est défini comme suit :

$$\rho = \frac{\sum_{k=1}^{m} w_{12}(k)}{[(\sum_{k=1}^{m} w_{11}(k))(\sum_{k=1}^{m} w_{22}(k))]^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association généralisé de Paulauskas

Paulauskas (1976) a introduit le paramètre d'association généralisé, applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$.
Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et Γ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma(S_2)$. Puisque Γ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1 U_2}{(EU_1^2 EU_2^2)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association généralisé de Paulauskas

Paulauskas (1976) a introduit le paramètre d'association généralisé, applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$.
Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et Γ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma(S_2)$. Puisque Γ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1 U_2}{(EU_1^2 EU_2^2)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association généralisé de Paulauskas

Paulauskas (1976) a introduit le paramètre d'association généralisé, applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$.

Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et Γ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma(S_2)$. Puisque Γ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1 U_2}{(EU_1^2 EU_2^2)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association généralisé de Paulauskas

Paulauskas (1976) a introduit le paramètre d'association généralisé, applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$.

Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et Γ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\Gamma} = \Gamma / \Gamma(S_2)$. Puisque Γ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1 U_2}{(EU_1^2 EU_2^2)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association généralisé de Paulauskas

Paulauskas (1976) a introduit le paramètre d'association généralisé, applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$.

Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{\Gamma}$ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma(S_2)$. Puisque Γ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1 U_2}{(EU_1^2 EU_2^2)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association généralisé de Paulauskas

Paulauskas (1976) a introduit le paramètre d'association généralisé, applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$.

Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{\Gamma}$ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma(S_2)$. Puisque Γ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1 U_2}{(EU_1^2 EU_2^2)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association généralisé de Paulauskas

Paulauskas (1976) a introduit le paramètre d'association généralisé, applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$.
Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{\Gamma}$ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma}/\mathbf{\Gamma}(S_2)$. Puisque $\mathbf{\Gamma}$ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1 U_2}{(EU_1^2 EU_2^2)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association généralisé de Paulauskas

Paulauskas (1976) a introduit le paramètre d'association généralisé, applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$.

Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{\Gamma}$ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma}/\mathbf{\Gamma}(S_2)$. Puisque $\mathbf{\Gamma}$ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1 U_2}{(EU_1^2 EU_2^2)^{1/2}}.$$

Coefficient covariation et covariation symétrique

Cambanis et Miller (1981) ont introduit la covariation pour $1 < \alpha < 2$. Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ réel de mesure spectrale Γ définie sur le cercle unité S_2. La covariation de X_1 sur X_2 est définie par

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \Gamma(d\mathbf{s})$$

où $a^{<p>} = \mathrm{sign}(a)|a|^p$.
Le coefficient de covariation est donné par

$$\lambda_{X_1,X_2} = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{[X_2, X_2]_\alpha}.$$

Intérêt

Garel et al. (2007) définissent le coefficient de covariation symétrique par

$$\mathrm{Corr}_\alpha(X_1, X_2) = \lambda_{X_1,X_2}\lambda_{X_2,X_1}.$$

Coefficient covariation et covariation symétrique

Cambanis et Miller (1981) ont introduit la covariation pour $1 < \alpha < 2$.

Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ réel de mesure spectrale Γ définie sur le cercle unité S_2. La covariation de X_1 sur X_2 est définie par

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \Gamma(d\mathbf{s})$$

où $a^{<p>} = \mathrm{sign}(a)|a|^p$.

Le coefficient de covariation est donné par

$$\lambda_{X_1,X_2} = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{[X_2, X_2]_\alpha}.$$

Intérêt

Garel et al. (2007) définissent le coefficient de covariation symétrique par

$$\mathrm{Corr}_\alpha(X_1, X_2) = \lambda_{X_1,X_2}\lambda_{X_2,X_1}.$$

Coefficient covariation et covariation symétrique

Cambanis et Miller (1981) ont introduit la covariation pour $1 < \alpha < 2$. Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ réel de mesure spectrale $\mathbf{\Gamma}$ définie sur le cercle unité S_2. La covariation de X_1 sur X_2 est définie par

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})$$

où $a^{<p>} = \mathrm{sign}(a)|a|^p$.
Le coefficient de covariation est donné par

$$\lambda_{X_1,X_2} = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{[X_2, X_2]_\alpha}.$$

Intérêt

Garel et al. (2007) définissent le coefficient de covariation symétrique par

$$\mathrm{Corr}_\alpha(X_1, X_2) = \lambda_{X_1,X_2} \lambda_{X_2,X_1}.$$

Coefficient covariation et covariation symétrique

Cambanis et Miller (1981) ont introduit la covariation pour $1 < \alpha < 2$.
Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ réel de mesure spectrale $\mathbf{\Gamma}$ définie sur le cercle unité S_2. La covariation de X_1 sur X_2 est définie par

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})$$

où $a^{<p>} = \mathrm{sign}(a)|a|^p$.
Le coefficient de covariation est donné par

$$\lambda_{X_1,X_2} = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{[X_2, X_2]_\alpha}.$$

Intérêt

Garel et al. (2007) définissent le coefficient de covariation symétrique par

$$\mathrm{Corr}_\alpha(X_1, X_2) = \lambda_{X_1,X_2}\lambda_{X_2,X_1}.$$

Coefficient covariation et covariation symétrique

Cambanis et Miller (1981) ont introduit la covariation pour $1 < \alpha < 2$.
Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ réel de mesure spectrale $\mathbf{\Gamma}$ définie sur le cercle unité S_2. La covariation de X_1 sur X_2 est définie par

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})$$

où $a^{<p>} = \mathrm{sign}(a)|a|^p$.
Le coefficient de covariation est donné par

$$\lambda_{X_1,X_2} = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{[X_2, X_2]_\alpha}.$$

▸ Intérêt

Garel et al. (2007) définissent le coefficient de covariation symétrique par

$$\mathrm{Corr}_\alpha(X_1, X_2) = \lambda_{X_1,X_2}\lambda_{X_2,X_1}.$$

Coefficient covariation et covariation symétrique

Cambanis et Miller (1981) ont introduit la covariation pour $1 < \alpha < 2$.
Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ réel de mesure spectrale $\mathbf{\Gamma}$ définie sur le cercle unité S_2. La covariation de X_1 sur X_2 est définie par

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})$$

où $a^{<p>} = \mathrm{sign}(a)|a|^p$.
Le coefficient de covariation est donné par

$$\lambda_{X_1,X_2} = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{[X_2, X_2]_\alpha}.$$

Intérêt

Garel et al. (2007) définissent le coefficient de covariation symétrique par

$$\mathrm{Corr}_\alpha(X_1, X_2) = \lambda_{X_1,X_2}\lambda_{X_2,X_1}.$$

Coefficient covariation et covariation symétrique

Cambanis et Miller (1981) ont introduit la covariation pour $1 < \alpha < 2$.
Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ réel de mesure spectrale $\mathbf{\Gamma}$ définie sur le cercle unité S_2. La covariation de X_1 sur X_2 est définie par

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})$$

où $a^{<p>} = \mathrm{sign}(a)|a|^p$.
Le coefficient de covariation est donné par

$$\lambda_{X_1,X_2} = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{[X_2, X_2]_\alpha}.$$

Intérêt

Garel et al. (2007) définissent le coefficient de covariation symétrique par

$$\mathrm{Corr}_\alpha(X_1, X_2) = \lambda_{X_1,X_2}\lambda_{X_2,X_1}.$$

Coefficient covariation et covariation symétrique

Cambanis et Miller (1981) ont introduit la covariation pour $1 < \alpha < 2$. Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ réel de mesure spectrale $\mathbf{\Gamma}$ définie sur le cercle unité S_2. La covariation de X_1 sur X_2 est définie par

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})$$

où $a^{<p>} = \mathrm{sign}(a)|a|^p$.
Le coefficient de covariation est donné par

$$\lambda_{X_1,X_2} = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{[X_2, X_2]_\alpha}.$$

Intérêt

Garel et al. (2007) définissent le coefficient de covariation symétrique par

$$\mathrm{Corr}_\alpha(X_1, X_2) = \lambda_{X_1,X_2}\lambda_{X_2,X_1}.$$

Plan

Définition et propriétés

Ce coefficient a été introduit par Garel et Kodia (2009).

Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2, est la quantité :

$$\operatorname{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}},$$

Définition

Ce coefficient possède les propriétés suivantes :

1. $-1 \leq \operatorname{scov}(X_1, X_2) \leq 1$ et si X_1, X_2 sont indépendants, alors $\operatorname{scov}(X_1, X_2) = 0$;
2. pour tout $a \neq 0$, $|\operatorname{scov}(X, aX)| = 1$;
3. Soient a et b deux réels non nuls, alors
$$\operatorname{scov}(aX_1, bX_2) = \pm \operatorname{scov}_\alpha(X_1, X_2).$$
4. pour $\alpha = 2$, $\operatorname{scov}(X_1, X_2)$ coïncide avec le coefficient de corrélation habituel.

Définition et propriétés

Ce coefficient a été introduit par Garel et Kodia (2009).
Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2, est la quantité :

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}},$$

Définition

Ce coefficient possède les propriétés suivantes :

1. $-1 \leq \mathrm{scov}(X_1, X_2) \leq 1$ et si X_1, X_2 sont indépendants, alors $\mathrm{scov}(X_1, X_2) = 0$;
2. pour tout $a \neq 0$, $|\mathrm{scov}(X, aX)| = 1$;
3. Soient a et b deux réels non nuls, alors
$$\mathrm{scov}(aX_1, bX_2) = \pm\, \mathrm{scov}_\alpha(X_1, X_2).$$
4. pour $\alpha = 2$, $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$ coïncide avec le coefficient de corrélation habituel.

Définition et propriétés

Ce coefficient a été introduit par Garel et Kodia (2009).
Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2, est la quantité :

$$\operatorname{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1, X_2)} \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}},$$

Définition

Ce coefficient possède les propriétés suivantes :

1. $-1 \leq \operatorname{scov}(X_1, X_2) \leq 1$ et si X_1, X_2 sont indépendants, alors $\operatorname{scov}(X_1, X_2) = 0$;
2. pour tout $a \neq 0$, $|\operatorname{scov}(X, aX)| = 1$;
3. Soient a et b deux réels non nuls, alors
$$\operatorname{scov}(aX_1, bX_2) = \pm \operatorname{scov}_\alpha(X_1, X_2).$$
4. pour $\alpha = 2$, $\operatorname{scov}(X_1, X_2)$ coïncide avec le coefficient de corrélation habituel.

Définition et propriétés

Ce coefficient a été introduit par Garel et Kodia (2009).
Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2, est la quantité :

$$\operatorname{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}},$$

Définition

Ce coefficient possède les propriétés suivantes :

1. $-1 \leq \operatorname{scov}(X_1, X_2) \leq 1$ et si X_1, X_2 sont indépendants, alors $\operatorname{scov}(X_1, X_2) = 0$;
2. pour tout $a \neq 0$, $|\operatorname{scov}(X, aX)| = 1$;
3. Soient a et b deux réels non nuls, alors
$$\operatorname{scov}(aX_1, bX_2) = \pm \operatorname{scov}_\alpha(X_1, X_2),$$
4. pour $\alpha = 2$, $\operatorname{scov}(X_1, X_2)$ coïncide avec le coefficient de corrélation habituel.

Définition et propriétés

Ce coefficient a été introduit par Garel et Kodia (2009).
Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2, est la quantité :

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}},$$

Définition

Ce coefficient possède les propriétés suivantes :

1. $-1 \leq \mathrm{scov}(X_1, X_2) \leq 1$ et si X_1, X_2 sont indépendants, alors $\mathrm{scov}(X_1, X_2) = 0$;
2. pour tout $a \neq 0$, $|\mathrm{scov}(X, aX)| = 1$;
3. Soient a et b deux réels non nuls, alors

$$\mathrm{scov}(aX_1, bX_2) = \pm\, \mathrm{scov}_\alpha(X_1, X_2),$$

4. pour $\alpha = 2$, $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$ coïncide avec le coefficient de corrélation habituel.

Définition et propriétés

Ce coefficient a été introduit par Garel et Kodia (2009).
Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2, est la quantité :

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}},$$

Définition

Ce coefficient possède les propriétés suivantes :

1. $-1 \leq \mathrm{scov}(X_1, X_2) \leq 1$ et si X_1, X_2 sont indépendants, alors $\mathrm{scov}(X_1, X_2) = 0$;
2. pour tout $a \neq 0$, $|\mathrm{scov}(X, aX)| = 1$;
3. Soient a et b deux réels non nuls, alors
$$\mathrm{scov}(aX_1, bX_2) = \pm\, \mathrm{scov}_\alpha(X_1, X_2),$$
4. pour $\alpha = 2$, $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$ coïncide avec le coefficient de corrélation habituel.

Définition et propriétés

Ce coefficient a été introduit par Garel et Kodia (2009).
Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2, est la quantité :

$$\operatorname{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}},$$

▸ Définition

Ce coefficient possède les propriétés suivantes :

1. $-1 \leq \operatorname{scov}(X_1, X_2) \leq 1$ et si X_1, X_2 sont indépendants, alors $\operatorname{scov}(X_1, X_2) = 0$;
2. pour tout $a \neq 0$, $|\operatorname{scov}(X, aX)| = 1$;
3. Soient a et b deux réels non nuls, alors

$$\operatorname{scov}(aX_1, bX_2) = \pm \operatorname{scov}_\alpha(X_1, X_2),$$

4. pour $\alpha = 2$, $\operatorname{scov}(X_1, X_2)$ coïncide avec le coefficient de corrélation habituel.

Cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens

Soient $0 < \alpha < 2$, G_1, G_2 des variables conjointement normales de moyenne nulle et A une variable aléatoire positive, indépendante de (G_1, G_2), telle que $A \sim S_{\alpha/2}((\cos\frac{\pi\alpha}{4})^{2/\alpha}, 1, 0)$. Alors $\mathbf{X} = A^{1/2}\mathbf{G} = (A^{1/2}G_1, A^{1/2}G_2)$ est un vecteur aléatoire α-stable appelé sous-gaussien de vecteur gaussien sous-jacent $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$.

Fonction

Proposition

Soient $1 < \alpha < 2$ et $\boldsymbol{X}$ un vecteur sous gaussien de fonction caractéristique (1), alors le coefficient de covariation symétrique signé coïncide avec le gap et le paramètre d'association entre les composantes de $\boldsymbol{X}$. Dans ce cas, $\mathrm{scov}(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow$ la distribution de $\boldsymbol{X}$ est concentrée sur une ligne.

Cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens

Soient $0 < \alpha < 2$, G_1, G_2 des variables conjointement normales de moyenne nulle et A une variable aléatoire positive, indépendante de (G_1, G_2), telle que $A \sim S_{\alpha/2}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{2/\alpha}, 1, 0\right)$. Alors $\mathbf{X} = A^{1/2}\mathbf{G} = (A^{1/2}G_1, A^{1/2}G_2)$ est un vecteur aléatoire α-stable appelé sous-gaussien de vecteur gaussien sous-jacent $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$.

Fonction

Proposition

Soient $1 < \alpha < 2$ et $\boldsymbol{X}$ un vecteur sous gaussien de fonction caractéristique (1), alors le coefficient de covariation symétrique signé coïncide avec le gap et le paramètre d'association entre les composantes de $\boldsymbol{X}$. Dans ce cas, $\mathrm{scov}(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow$ la distribution de $\boldsymbol{X}$ est concentrée sur une ligne.

Cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens

Soient $0 < \alpha < 2$, G_1, G_2 des variables conjointement normales de moyenne nulle et A une variable aléatoire positive, indépendante de (G_1, G_2), telle que $A \sim S_{\alpha/2}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{2/\alpha}, 1, 0\right)$. Alors $\mathbf{X} = A^{1/2}\mathbf{G} = (A^{1/2}G_1, A^{1/2}G_2)$ est un vecteur aléatoire α-stable appelé sous-gaussien de vecteur gaussien sous-jacent $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$.

Fonction

Proposition

Soient $1 < \alpha < 2$ et $\mathbf{X}$ un vecteur sous gaussien de fonction caractéristique (1), alors le coefficient de covariation symétrique signé coïncide avec le gap et le paramètre d'association entre les composantes de $\mathbf{X}$. Dans ce cas, $\mathrm{scov}(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow$ la distribution de $\mathbf{X}$ est concentrée sur une ligne.

Cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens

Soient $0 < \alpha < 2$, G_1, G_2 des variables conjointement normales de moyenne nulle et A une variable aléatoire positive, indépendante de (G_1, G_2), telle que $A \sim S_{\alpha/2}\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\right)^{2/\alpha}, 1, 0\right)$. Alors $\mathbf{X} = A^{1/2}\mathbf{G} = (A^{1/2}G_1, A^{1/2}G_2)$ est un vecteur aléatoire α-stable appelé sous-gaussien de vecteur gaussien sous-jacent $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$.

Fonction

Proposition

Soient $1 < \alpha < 2$ et $\boldsymbol{X}$ un vecteur sous gaussien de fonction caractéristique (1), alors le coefficient de covariation symétrique signé coïncide avec le gap et le paramètre d'association entre les composantes de $\boldsymbol{X}$. Dans ce cas, $\mathrm{scov}(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow$ la distribution de $\boldsymbol{X}$ est concentrée sur une ligne.

Cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens

Soient $0 < \alpha < 2$, G_1, G_2 des variables conjointement normales de moyenne nulle et A une variable aléatoire positive, indépendante de (G_1, G_2), telle que $A \sim S_{\alpha/2}\left(\left(\cos \frac{\pi\alpha}{4}\right)^{2/\alpha}, 1, 0\right)$. Alors $\mathbf{X} = A^{1/2}\mathbf{G} = (A^{1/2}G_1, A^{1/2}G_2)$ est un vecteur aléatoire α-stable appelé sous-gaussien de vecteur gaussien sous-jacent $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$.

Fonction

Proposition

Soient $1 < \alpha < 2$ et $\boldsymbol{X}$ un vecteur sous gaussien de fonction caractéristique (1), alors le coefficient de covariation symétrique signé coïncide avec le gap et le paramètre d'association entre les composantes de $\boldsymbol{X}$. Dans ce cas, $\mathrm{scov}(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow$ la distribution de $\boldsymbol{X}$ est concentrée sur une ligne.

Combinaisons linéaires de v.a. symétriques stables indépendantes

Soient $1 < \alpha \leq 2$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_k \sim S_\alpha(\gamma_k, 0, 0), k = 1, 2$. Soit $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$, $1 \leq j \leq k \leq 2$, une matrice réelle. Le vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = \mathbf{AX}$, dont les composantes sont des combinaisons linéaires

$$Y_j = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} X_k, \quad j = 1, 2,$$

des X_k, est α-stable. Sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\left\{i \sum_{j=1}^{2} \theta_j Y_j\right\} = \prod_{k=1}^{2} E \exp\left\{i \Big(\sum_{j=1}^{2} \theta_j a_{jk}\Big) X_k\right\}.$$

Combinaisons linéaires de v.a. symétriques stables indépendantes

Soient $1 < \alpha \leq 2$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_k \sim S_\alpha(\gamma_k, 0, 0), k = 1, 2$. Soit $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$, $1 \leq j \leq k \leq 2$, une matrice réelle. Le vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = \mathbf{AX}$, dont les composantes sont des combinaisons linéaires

$$Y_j = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} X_k, \quad j = 1, 2,$$

des X_k, est α-stable. Sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{2} \theta_j Y_j \right\} = \prod_{k=1}^{2} E \exp\left\{ i \Big(\sum_{j=1}^{2} \theta_j a_{jk} \Big) X_k \right\}.$$

Combinaisons linéaires de v.a. symétriques stables indépendantes

Soient $1 < \alpha \leq 2$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_k \sim S_\alpha(\gamma_k, 0, 0), k = 1, 2$. Soit $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}, 1 \leq j \leq k \leq 2$, une matrice réelle. Le vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = \mathbf{AX}$, dont les composantes sont des combinaisons linéaires

$$Y_j = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} X_k, \quad j = 1, 2,$$

des X_k, est α-stable. Sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{2} \theta_j Y_j \right\} = \prod_{k=1}^{2} E \exp\left\{ i \left(\sum_{j=1}^{2} \theta_j a_{jk} \right) X_k \right\}.$$

Combinaisons linéaires de v.a. symétriques stables indépendantes

Soient $1 < \alpha \leq 2$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_k \sim S_\alpha(\gamma_k, 0, 0), k = 1, 2$. Soit $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$, $1 \leq j \leq k \leq 2$, une matrice réelle. Le vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = \mathbf{AX}$, dont les composantes sont des combinaisons linéaires

$$Y_j = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} X_k, \quad j = 1, 2,$$

des X_k, est α-stable. Sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{2} \theta_j Y_j \right\} = \prod_{k=1}^{2} E \exp\left\{ i \Big(\sum_{j=1}^{2} \theta_j a_{jk} \Big) X_k \right\}.$$

Soient $1 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ un vecteur a. α-stable t. q. $\gamma_1 = \gamma_2$, alors le coefficient de covariation symétrique signé est donné par :

$$scov(Y_1, Y_2) = \kappa_{(Y_1,Y_2)} \frac{\left| |a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22})^{\langle\alpha-1\rangle} \right|^{\frac{1}{2}}}{\left(|a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + |a_{12}a_{21}|^\alpha + |a_{11}a_{22}|^\alpha \right)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association est :

$$\rho = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{[(a_{11}^2 + a_{12}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2)]^{1/2}},$$

et le gap est donné par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{a_{11}a_{21}(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}a_{22}(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\left[\left(a_{11}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)\left(a_{21}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{22}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons aussi

$$|\mathrm{scov}| = 1 \Leftrightarrow |\widetilde{\rho}| = 1 \Leftrightarrow |\rho| = 1.$$

Soient $1 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ un vecteur a. α-stable t. q. $\gamma_1 = \gamma_2$, alors le coefficient de covariation symétrique signé est donné par :

$$scov(Y_1, Y_2) = \kappa_{(Y_1, Y_2)} \frac{\left| |a_{11}a_{21}|^{\alpha} + |a_{12}a_{22}|^{\alpha} + a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})^{\langle \alpha - 1 \rangle} + a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22})^{\langle \alpha - 1 \rangle} \right|^{\frac{1}{2}}}{\left(|a_{11}a_{21}|^{\alpha} + |a_{12}a_{22}|^{\alpha} + |a_{12}a_{21}|^{\alpha} + |a_{11}a_{22}|^{\alpha} \right)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association est :

$$\rho = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{[(a_{11}^2 + a_{12}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2)]^{1/2}},$$

et le gap est donné par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{a_{11}a_{21}(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}a_{22}(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\left[\left(a_{11}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \right) \left(a_{21}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{22}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons aussi

$$|\mathrm{scov}| = 1 \Leftrightarrow |\widetilde{\rho}| = 1 \Leftrightarrow |\rho| = 1.$$

Soient $1 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ un vecteur a. α-stable t. q. $\gamma_1 = \gamma_2$, alors le coefficient de covariation symétrique signé est donné par :

$$scov(Y_1, Y_2) = \kappa_{(Y_1,Y_2)} \frac{\left| |a_{11}a_{21}|^{\alpha} + |a_{12}a_{22}|^{\alpha} + a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22})^{\langle\alpha-1\rangle} \right|^{\frac{1}{2}}}{\left(|a_{11}a_{21}|^{\alpha} + |a_{12}a_{22}|^{\alpha} + |a_{12}a_{21}|^{\alpha} + |a_{11}a_{22}|^{\alpha}\right)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association est :

$$\rho = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{[(a_{11}^2 + a_{12}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2)]^{1/2}},$$

et le gap est donné par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{a_{11}a_{21}(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}a_{22}(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\left[\left(a_{11}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)\left(a_{21}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{22}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons aussi

$$|\mathrm{scov}| = 1 \Leftrightarrow |\widetilde{\rho}| = 1 \Leftrightarrow |\rho| = 1.$$

Soient $1 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ un vecteur a. α-stable t. q. $\gamma_1 = \gamma_2$, alors le coefficient de covariation symétrique signé est donné par :

$$scov(Y_1, Y_2) = \kappa_{(Y_1, Y_2)} \frac{\left| |a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22})^{\langle\alpha-1\rangle} \right|^{\frac{1}{2}}}{\left(|a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + |a_{12}a_{21}|^\alpha + |a_{11}a_{22}|^\alpha\right)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association est :

$$\rho = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{[(a_{11}^2 + a_{12}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2)]^{1/2}},$$

et le gap est donné par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{a_{11}a_{21}(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}a_{22}(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\left[\left(a_{11}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)\left(a_{21}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{22}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons aussi

$$|\mathrm{scov}| = 1 \Leftrightarrow |\widetilde{\rho}| = 1 \Leftrightarrow |\rho| = 1.$$

Soient $1 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ un vecteur a. α-stable t. q. $\gamma_1 = \gamma_2$, alors le coefficient de covariation symétrique signé est donné par :

$$scov(Y_1, Y_2) = \kappa_{(Y_1, Y_2)} \frac{\left| |a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})^{\langle \alpha - 1 \rangle} + a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22})^{\langle \alpha - 1 \rangle} \right|^{\frac{1}{2}}}{\left(|a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + |a_{12}a_{21}|^\alpha + |a_{11}a_{22}|^\alpha \right)^{1/2}}.$$

Le paramètre d'association est :

$$\rho = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{[(a_{11}^2 + a_{12}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2)]^{1/2}},$$

et le gap est donné par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{a_{11}a_{21}(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2} - 1} + a_{12}a_{22}(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2} - 1}}{\left[\left(a_{11}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2} - 1} + a_{12}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2} - 1} \right) \left(a_{21}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2} - 1} + a_{22}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2} - 1} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons aussi

$$|\mathrm{scov}| = 1 \Leftrightarrow |\widetilde{\rho}| = 1 \Leftrightarrow |\rho| = 1.$$

Deux estimateurs convergents

Un premier estimateur de $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$:

$$\widehat{\mathrm{scov}}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1, X_2)} \frac{\left| \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \ \mathrm{sign}(X_{2i}) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \ \mathrm{sign}(X_{1i}) \right) \right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} |X_{1i}| \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |X_{2i}| \right) \right]^{1/2}}$$

Précision

Un second estimateur de $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$:

$$\widehat{\mathrm{scov}}^{SR}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1, X_2)} \frac{\left| \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}^{-1} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{2i}|) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{1i}^{-1} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|Y_i|) \right) \right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{1i}|) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{2i}|) \right) \right]^{1/2}},$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires et les couples $(X_{11}, X_{21}), \ldots, (X_{1n}, X_{2n})$ sont des observations de (X_1, X_2) indépendantes.

Deux estimateurs convergents

Un premier estimateur de $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$:

$$\widehat{\mathrm{scov}}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1, X_2)} \frac{\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\ \mathrm{sign}(X_{2i})\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\ \mathrm{sign}(X_{1i})\right)\right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} |X_{1i}|\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |X_{2i}|\right)\right]^{1/2}}$$

Précision

Un second estimateur de $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$:

$$\widehat{\mathrm{scov}}^{SR}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1, X_2)} \frac{\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}^{-1} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{2i}|)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{1i}^{-1} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|Y_i|)\right)\right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{1i}|)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{2i}|)\right)\right]^{1/2}},$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires et les couples $(X_{11}, X_{21}), \ldots, (X_{1n}, X_{2n})$ sont des observations de (X_1, X_2) indépendantes.

Deux estimateurs convergents

Un premier estimateur de $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$:

$$\widehat{\mathrm{scov}}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1, X_2)} \frac{\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\ \mathrm{sign}(X_{2i})\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\ \mathrm{sign}(X_{1i})\right)\right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} |X_{1i}|\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |X_{2i}|\right)\right]^{1/2}}$$

Précision

Un second estimateur de $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$:

$$\widehat{\mathrm{scov}}^{SR}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1, X_2)} \frac{\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}^{-1} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{2i}|)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{1i}^{-1} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|Y_i|)\right)\right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{1i}|)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{2i}|)\right)\right]^{1/2}},$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires et les couples $(X_{11}, X_{21}), \ldots, (X_{1n}, X_{2n})$ sont des observations de (X_1, X_2) indépendantes.

Deux estimateurs convergents

Un premier estimateur de $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$:

$$\widehat{\mathrm{scov}}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1, X_2)} \frac{\left| \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \, \mathrm{sign}(X_{2i}) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \, \mathrm{sign}(X_{1i}) \right) \right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} |X_{1i}| \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |X_{2i}| \right) \right]^{1/2}}$$

Précision

Un second estimateur de $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$:

$$\widehat{\mathrm{scov}}^{SR}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1, X_2)} \frac{\left| \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}^{-1} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{2i}|) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{1i}^{-1} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|Y_i|) \right) \right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{1i}|) \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{]c_1, c_2[}(|X_{2i}|) \right) \right]^{1/2}},$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires et les couples $(X_{11}, X_{21}), ..., (X_{1n}, X_{2n})$ sont des observations de (X_1, X_2) indépendantes.

Résultats de simulation : cas sous-gaussien

Données	$\alpha = 1.5$, n=100, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$						
scov	-1.00	-0.80	-0.40	0.00	0.30	0.50	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.79 0.07	-0.40 0.14	0.02 0.16	0.26 0.18	0.48 0.13	0.89 0.05
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.81 0.25	-0.41 0.32	0.02 0.41	0.36 0.39	0.53 0.30	0.89 0.22

Données	$\alpha = 1.5$, n=500, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$						
scov	-1.00	-0.80	-0.40	0.00	0.30	0.50	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.79 0.06	-0.39 0.11	0.02 0.10	0.28 0.09	0.48 0.07	0.90 0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.78 0.14	-0.40 0.15	-0.00 0.17	0.34 0.13	0.49 0.14	0.91 0.09

Résultats de simulation : cas sous-gaussien

Données	$\alpha = 1.5$, n=100, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$						
scov	-1.00	-0.80	-0.40	0.00	0.30	0.50	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.79 0.07	-0.40 0.14	0.02 0.16	0.26 0.18	0.48 0.13	0.89 0.05
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.81 0.25	-0.41 0.32	0.02 0.41	0.36 0.39	0.53 0.30	0.89 0.22

Données	$\alpha = 1.5$, n=500, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$						
scov	-1.00	-0.80	-0.40	0.00	0.30	0.50	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.79 0.06	-0.39 0.11	0.02 0.10	0.28 0.09	0.48 0.07	0.90 0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.78 0.14	-0.40 0.15	-0.00 0.17	0.34 0.13	0.49 0.14	0.91 0.09

Résultats de simulation : combinaisons linéaires

Données	$\alpha = 1.7$, n=100, $\gamma = 10$						
a_{11}	100	30	-1	0	-12	-12	9
a_{12}	16	36	-11	-23	11	18	-15
a_{21}	-50	-12	51	-2	2	2	18
a_{22}	-8	-2	11	0	5	5	-10
scov	-1.00	-0.80	-0.40	0.00	0.31	0.50	0.90
$\widehat{\mathrm{scov}}$	-1.00 0.00	-0.80 0.05	-0.39 0.11	0.01 0.12	0.29 0.14	0.45 0.12	0.90 0.03
$\widehat{\mathrm{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.79 0.12	-0.37 0.19	-0.01 0.17	0.29 0.11	0.48 0.10	0.90 0.06

Données	$\alpha = 1.7$, n=500, $\gamma = 10$						
scov	-1.00	-0.80	-0.40	0.00	0.31	0.50	0.90
$\widehat{\mathrm{scov}}$	-1.00 0.00	-0.80 0.02	-0.38 0.05	0.00 0.06	0.29 0.07	0.49 0.06	0.90 0.01
$\widehat{\mathrm{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.81 0.05	-0.38 0.08	0.01 0.09	0.30 0.05	0.49 0.04	0.90 0.03

Résultats de simulation : combinaisons linéaires

Données	$\alpha = 1.7$, n=100, $\gamma = 10$						
a_{11}	100	30	-1	0	-12	-12	9
a_{12}	16	36	-11	-23	11	18	-15
a_{21}	-50	-12	51	-2	2	2	18
a_{22}	-8	-2	11	0	5	5	-10
scov	-1.00	-0.80	-0.40	0.00	0.31	0.50	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.80 0.05	-0.39 0.11	0.01 0.12	0.29 0.14	0.45 0.12	0.90 0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.79 0.12	-0.37 0.19	-0.01 0.17	0.29 0.11	0.48 0.10	0.90 0.06

Données	$\alpha = 1.7$, n=500, $\gamma = 10$						
scov	-1.00	-0.80	-0.40	0.00	0.31	0.50	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.80 0.02	-0.38 0.05	0.00 0.06	0.29 0.07	0.49 0.06	0.90 0.01
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.81 0.05	-0.38 0.08	0.01 0.09	0.30 0.05	0.49 0.04	0.90 0.03

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

Nous avons :

$$w(\theta,\alpha)=\begin{cases} -\tan\frac{\pi\alpha}{2} & si \quad \alpha\neq 1,\\ \frac{2}{\pi}\ln|\theta| & si \quad \alpha=1,\end{cases}$$

et

$$\mathrm{sign}(\theta)=\begin{cases} 1 & si \quad \theta>0,\\ 0 & si \quad \theta=0,\\ -1 & si \quad \theta<0.\end{cases}$$

◂ Retour

Intérêt du coefficient de covariation

Soit X_1 et X_2 conjointement $S\alpha S$ avec $1 < \alpha < 2$, alors

$$E(X_1|X_2) = \lambda_{X_1,X_2} X_2 \text{ p. s.}$$

◂ Retour

Suite de la définition

Soit X une variable aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. La norme de covariation de X est définie par

$$\|X_1\|_\alpha = ([X_1, X_1]_\alpha)^{1/\alpha}$$

et $\kappa_{(X_1,X_2)}$ indique le signe de la dépendance avec :

$$\kappa_{(X_1,X_2)} = \begin{cases} \mathrm{sign}([X_1, X_2]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| \geq \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|, \\ \mathrm{sign}([X_2, X_1]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| < \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|. \end{cases}$$

Retour

Suite de la définition

Soit X une variable aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. La norme de covariation de X est définie par

$$\|X_1\|_\alpha = ([X_1, X_1]_\alpha)^{1/\alpha}$$

et $\kappa_{(X_1,X_2)}$ indique le signe de la dépendance avec :

$$\kappa_{(X_1,X_2)} = \begin{cases} \mathrm{sign}([X_1, X_2]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| \geq \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|, \\ \mathrm{sign}([X_2, X_1]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| < \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|. \end{cases}$$

Retour

Suite de la définition

Soit X une variable aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. La norme de covariation de X est définie par

$$\|X_1\|_\alpha = ([X_1, X_1]_\alpha)^{1/\alpha}$$

et $\kappa_{(X_1,X_2)}$ indique le signe de la dépendance avec :

$$\kappa_{(X_1,X_2)} = \begin{cases} \operatorname{sign}([X_1, X_2]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| \geq \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|, \\ \operatorname{sign}([X_2, X_1]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| < \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|. \end{cases}$$

◂ Retour

Vecteurs aléatoires sous-gaussiens

La fonction caractéristique de **X** est donnée par :

$$E \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{2} \theta_k X_k \right\} = \exp\left\{ -\left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \theta_i \theta_j R_{ij} \right|^{\alpha/2} \right\}, \qquad (1)$$

où les $R_{ij} = EG_i G_j$, $i, j = 1, 2$ sont les covariances du vecteur gaussien sous-jacent **G.**

◂ Retour

Soit X_1 et X_2 conjointement $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Pour tout $1 \leq p < \alpha$, on a la relation :

$$\frac{[X_1, X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha} = \frac{EX_1 X_2^{<p-1>}}{E|X_2|^p}, \tag{2}$$

En utilisant l'égalité (2) dans laquelle on pose $p = 1$, alors $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$ est également donné par :

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1, X_2)} \left| \frac{(EX_1 \mathrm{sign}(X_2))(EX_2 \mathrm{sign}(X_1))}{E|X_1| E|X_2|} \right|^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Retour

Soit X_1 et X_2 conjointement $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Pour tout $1 \leq p < \alpha$, on a la relation :

$$\frac{[X_1, X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha} = \frac{EX_1X_2^{<p-1>}}{E|X_2|^p}, \qquad (2)$$

En utilisant l'égalité (2) dans laquelle on pose $p = 1$, alors $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$ est également donné par :

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{(EX_1 \mathrm{sign}(X_2))(EX_2 \mathrm{sign}(X_1))}{E|X_1|E|X_2|} \right|^{\frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

Retour

Soit X_1 et X_2 conjointement $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Pour tout $1 \leq p < \alpha$, on a la relation :

$$\frac{[X_1, X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha} = \frac{EX_1 X_2^{<p-1>}}{E|X_2|^p}, \tag{2}$$

En utilisant l'égalité (2) dans laquelle on pose $p = 1$, alors $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$ est également donné par :

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{(EX_1 \mathrm{sign}(X_2))(EX_2 \mathrm{sign}(X_1))}{E|X_1|E|X_2|} \right|^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Retour

Soit X_1 et X_2 conjointement $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Pour tout $1 \leq p < \alpha$, on a la relation :

$$\frac{[X_1, X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha} = \frac{EX_1 X_2^{<p-1>}}{E|X_2|^p}, \tag{2}$$

En utilisant l'égalité (2) dans laquelle on pose $p = 1$, alors $\mathrm{scov}(X_1, X_2)$ est également donné par :

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1, X_2)} \left| \frac{(EX_1 \mathrm{sign}(X_2))(EX_2 \mathrm{sign}(X_1))}{E|X_1|E|X_2|} \right|^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

◂ Retour