Nouvelles mesures de dépendance pour une modélisation alpha-stable.

Bernard GAREL[(⋆)(⋆⋆)] et Bernédy KODIA[(⋆⋆)]

[(⋆)] Université de Toulouse, INPT-ENSEEIHT.
[(⋆⋆)] Université de Toulouse, UPS, IMT.
E-mails : garel@enseeiht.fr, bernedy.kodia@enseeiht.fr.

1 Introduction

Les lois alpha-stables, généralisations de la loi gaussienne, constituent une classe très riche de distributions de probabilités qui prend en compte l'asymétrie et les queues lourdes. Ce sont des lois pour lesquelles l'exposant caractéristique α appartient à l'intervalle $]0, 2]$, la loi gaussienne correspondant à $\alpha = 2$. Une telle classe de lois se révèle très intéressante pour la modélisation de nombreux phénomènes physiques et de données financières qui présentent une grande variabilité. Toutefois, la difficulté de définir une mesure de dépendance appropriée, ajoutée au problème de la non existence de forme explicite de la densité pour la plupart de ces lois, a pendant longtemps restreint leur utilisation.
Les lois stables non-gaussiennes ont une variance infinie. Il en résulte que la matrice de corrélation n'est plus définie. Il est donc nécessaire de définir des coefficients de dépendance basés sur des moments plus petits que 2.
Après avoir rappelé quelques définitions de base, nous donnons quelques exemples de phénomènes relevant d'un modèle alpha-stable et présentons également quelques outils de modélisation. Nous présentons le concept de covariation, introduit dans le cas symétrique α-stable avec $1 < \alpha \leq 2$, et duquel découlent des coefficients de dépendance. Sur la base de la covariation ont été proposés respectivement le coefficient de covariation et le coefficient de covariation symétrique. Dans la même veine, nous proposons une nouvelle mesure de dépendance que nous appelons coefficient de covariation symétrique signé. Nous présentons une étude et une interprétation de ce coefficient pour une classe de lois stables : les vecteurs stables sous-gaussiens. Les lois stables sous-gaussiennes, mélanges continus de lois gaussiennes sur les variances, viennent d'un produit judicieux entre le radical d'une loi stable totalement asymétrique à droite d'exposant caractéristique $\frac{\alpha}{2}$ et d'une loi gaussienne, les deux lois étant indépendantes. Dans ce cas particulier, nous montrons l'égalité entre le coefficient d'association généralisé et le coefficient que nous proposons. Nous donnons également l'expression du coefficient de covariation symétrique signé dans le cas des combinaisons linéaires de variables aléatoires α-stables indépendantes. A l'aide de simulations nous étudions les performances de deux estimateurs du nouveau coefficient.

2 Quelques rappels de base sur les lois α-stables

Nous définissons ici les variables et vecteurs aléatoires α-stables par leur fonction caractéristique. Une variable aléatoire X est dite avoir une distribution stable si et seulement si il existe quatre paramètres $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et δ réel tels sa fonction caractéristique a la forme suivante :

$$E \exp i\theta X = \exp\Big\{ -\gamma^\alpha |\theta|^\alpha \left[1 + i\beta \mathrm{sign}(\theta) w(\theta, \alpha)\right] + i\delta\theta \Big\}, \tag{1}$$

où

$$w(\theta,\alpha) = \begin{cases} -\tan\frac{\pi\alpha}{2} & \text{si} \quad \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\ln|\theta| & \text{si} \quad \alpha = 1, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sign}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \theta > 0, \\ 0 & \text{si} \quad \theta = 0, \\ -1 & \text{si} \quad \theta < 0. \end{cases}$$

Le paramètre α est appelé index de stabilité ou exposant caractéristique de la loi de X. Le paramètre β mesure l'asymétrie, γ est le paramètre d'échelle et δ est le paramètre de position. Nous utilisons la notation $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$ pour dire que la variable aléatoire réelle X suit la loi $S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$. Quand $\beta = \delta = 0$, X est dite symétrique α-stable ($S\alpha S$, ce qui signifie que X et $-X$ ont la même distribution) et sa fonction caractéristique a la forme simple suivante :

$$E \exp i\theta X = \exp\{-\gamma^\alpha |\theta|^\alpha\}. \tag{2}$$

La définition d'une variable aléatoire α-stable est étendue à $\mathbb{R}^2$ de la façon suivante. Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie $\mathbf{\Gamma}$ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur $\boldsymbol{\delta}$ tels que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$:

$$E \exp\left(i\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left\{ -\int_{S_2} |\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \left[1 + i \mathrm{sign}\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle w(\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle, \alpha)\right] \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) + i\langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}\rangle \right\}, \tag{3}$$

Ici $\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. La mesure $\mathbf{\Gamma}$ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple $(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\delta})$ est unique. Le vecteur est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{\delta} = 0$ et $\mathbf{\Gamma}$ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E \exp\{i\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{ -\int_{S_2} |\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) \right\}. \tag{4}$$

La mesure spectrale porte l'information essentielle sur le vecteur, en particulier sur la structure de dépendance entre ses composantes. Il s'ensuit que toutes les mesures de dépendance s'expriment en fonction de cette dernière. Par exemple, pour tout vecteur

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, la projection $\langle \mathbf{u}, \mathbf{X} \rangle = \sum_{k=1}^{2} u_k X_k$ a une distribution α-stable $S_\alpha(\gamma_{\mathbf{u}}, \beta_{\mathbf{u}}, \delta_{\mathbf{u}})$. La mesure spectrale détermine les fonctions de paramètres de projection par :

$$\gamma(\mathbf{u}) = \Big(\int_{S_2} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) \Big)^{1/\alpha}, \tag{5}$$

$$\beta(\mathbf{u}) = \frac{\int_{S_2} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \mathrm{sign}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle) \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})}{\int_{S_2} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})} \tag{6}$$

$$\delta(\mathbf{u}) = \begin{cases} \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \rangle & \alpha \neq 1 \\ \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\delta} \rangle - \frac{2}{\pi} \int_{S_2} (\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle) \ln |\langle \mathbf{u}, \mathbf{s} \rangle| \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) & \alpha = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Depuis les travaux pionniers de Mandelbrot (1960), l'intérêt pour les lois α-stables s'est grandement accru. De nos jours, elles sont largement utilisées en télécommunication et beaucoup d'autres champs comme la physique, la biologie, la génétique et la géologie. Berger et Mandelbrot (1963) ont utilisé des distributions stables pour décrire les modes de regroupements d'erreur en circuits téléphoniques. La loi de Cauchy (loi stable avec α=1) est largement utilisée pour décrire des phénomènes physiques, par exemple l'élargissement de la raie spectrale d'une charge sous l'action d'une force quasi-électrique. Weron et Weron (1987) ont consideré des modèles menant à des distributions stables et expliquant l'universalité de la fonction de William-Watts pour le problème de relaxation des matériaux vitreux. En utilisant des lois stables, Sindler (1956) donna la solution au problème du calcul de la performance des systèmes de relais des stations radio exprimé mathématiquement par Siforov (1956). En finance, McCulloch (1985) utilisa des lois stables pour la modélisation des options sur les matières premières, les actions et les taux de change. Tous ces exemples sont donnés dans [9].

2.1 Coefficients de dépendance entre composantes de vecteurs aléatoires $S\alpha S$

Press [6] proposa une mesure de dépendance entre composantes d'un vecteur symétrique α-stable bivarié dont la fonction caractéristique est donnée par :

$$\begin{aligned} E \exp\left(i\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X} \rangle\right) &= \exp\Big\{ -\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{\theta} \mathbf{\Omega}_k \boldsymbol{\theta}')^{\alpha/2} \Big\} \\ &= \exp\Big\{ -\sum_{k=1}^{m} \big(w_{11}(k)\theta_1^2 + 2w_{12}(k)\theta_1\theta_2 + w_{22}(k)\theta_2^2 \big)^{\alpha/2} \Big\}, \end{aligned} \tag{8}$$

où $\mathbf{\Omega}_k$, $k = 1, ..., m$ sont des matrices symétriques positives de dimension 2×2. Le paramètre d'association (a.p.) ρ est défini comme suit :

$$\rho = \frac{\sum_{k=1}^{m} w_{12}(k)}{[(\sum_{k=1}^{m} w_{11}(k))(\sum_{k=1}^{m} w_{22}(k))]^{1/2}}. \tag{9}$$

Il est montré que pour $\alpha = 2$, le paramètre d'association coïncide avec le coefficient de corrélation ordinaire d'un vecteur aléatoire gaussien. Pour $0 < \alpha < 2$ celui-ci possède toutes les propriétés d'un coefficient de corrélation.
Paulauskas (1976) a introduit un autre concept de dépendance, le gap, plus général que le paramètre d'association, et applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$. Celui-ci se définit de la manière suivante.

Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{\Gamma}$ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma}/\mathbf{\Gamma}(S_2)$. Puisque $\mathbf{\Gamma}$ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1U_2}{(EU_1^2 EU_2^2)^{1/2}}. \tag{10}$$

Pour un vecteur stable de fonction caractéristique (4) le gap $\widetilde{\rho}$ a les propriétés suivantes pour tout $0 < \alpha \leq 2$: (i) on a toujours $-1 \leq \widetilde{\rho} \leq 1$ et si une distribution correspond à un vecteur aléatoire dont les composantes sont indépendantes, alors $\widetilde{\rho} = 0$. (ii) Si $|\widetilde{\rho}| = 1$ alors la distribution est concentrée sur une droite. (iii) Pour $\alpha = 2$, $\widetilde{\rho}$ coïncide avec le coefficient de corrélation d'un vecteur aléatoire gaussien. (iv) $\widetilde{\rho}$ est indépendant de α et ne dépend que de la mesure spectrale $\mathbf{\Gamma}$. (v) Si une fonction caractéristique est donnée par

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp\left\{-C(\gamma_1^2 t_1^2 + 2r\gamma_1\gamma_2 t_1 t_2 + \gamma_2^2 t_2^2)^{\alpha/2}\right\}, \tag{11}$$

où C est une constante appropriée, alors r est le gap.
Miller [5] et Cambanis et Miller [1] ont introduit la covariation pour $1 < \alpha < 2$. Soit (X_1, X_2) un vecteur symétrique α-stable réel de mesure spectrale $\mathbf{\Gamma}$ définie sur le cercle unité S_2. La covariation de X_1 sur X_2, notée $[X_1, X_2]_\alpha$, est définie des deux façons équivalentes suivantes :

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 s_2^{<\alpha-1>} \mathbf{\Gamma}(d\boldsymbol{s}) \quad (12) \quad \text{et} \quad [X_1, X_2]_\alpha = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \gamma^\alpha(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}\Big|_{\theta_1=0,\theta_2=1} \quad (13)$$

où $a^{<p>} = \text{sign}(a)|a|^p$ est appelée puissance signée, θ_1 et θ_2 sont des réels, et $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ est le paramètre d'échelle de la variable aléatoire $S\alpha S$ réelle $Y = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2$. Soit (X_1, X_2, Y) un vecteur $S\alpha S$, la covariation possède les propriétés suivantes : (i) elle est additive par par rapport à son premier argument c'est-à-dire $[X_1 + X_2, Y]_\alpha = [X_1, Y]_\alpha + [X_2, Y]_\alpha$. (ii) Soient a et b deux réels, on a :

$$[aX_1, bX_2]_\alpha = ab^{<\alpha-1>}[X_1, X_2]_\alpha. \tag{14}$$

(iii) Si X_1 et X_2 sont conjointement $S\alpha S$ et indépendants, alors $[X_1, X_2]_\alpha = 0$. (iv) L'inégalité suivante est satisfaite

$$|[X_1, X_2]_\alpha| \leq \|X_1\|_\alpha \|X_2\|_\alpha^{\alpha-1}, \tag{15}$$

où $\|\cdot\|_\alpha$ désigne la norme de covariation définie par $\|X_1\|_\alpha = ([X_1, X_1]_\alpha)^{1/\alpha}$. La covariation est en général non-linéaire par rapport à son second argument et non symétrique par rapport à ses arguments.
Il existe un lien entre la covariation de X_1 sur X_2 et le moment conjoint $EX_1X_2^{<p-1>}$. Pour tout $1 \leq p < \alpha$, on a la relation :

$$\frac{[X_1, X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha} = \frac{EX_1X_2^{<p-1>}}{E|X_2|^p}, \tag{16}$$

Nikias et Shao (1995) ont appelé la quantité de gauche de cette égalité coefficient de covariation de X_1 sur X_2. Cette quantité est aussi le coefficient de linéarité de la régression $E(X_1|X_2)$. Le coefficient de covariation est encore appelé coefficient de projection de Kanter. Ce coefficient n'est pas symétrique et peut être non borné. Garel et al. [2] ont proposé le coefficient de covariation symétrique défini par :

$$\mathrm{Corr}_\alpha(X_1, X_2) = \frac{[X, Y]_\alpha [Y, X]_\alpha}{\|X\|_\alpha^\alpha \|Y\|_\alpha^\alpha}. \tag{17}$$

Ce coefficient est symétrique, borné. Il est nul quand X_1 et X_2 sont indépendants.

3 Coefficient de covariation symétrique signé et propriétés

Ce coefficient a été introduit par Garel et Kodia [3].

Définition 3.1 *Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2, est la quantité :*

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

où

$$\kappa_{(X_1,X_2)} = \begin{cases} \mathrm{sign}([X_1, X_2]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| \geq \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|, \\ \\ \mathrm{sign}([X_2, X_1]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| < \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|. \end{cases} \tag{19}$$

Ainsi $\kappa_{(X_1,X_2)}$ est le signe du coefficient de covariation le plus grand en valeur absolue.
En utilisant l'égalité (16) dans laquelle on pose $p = 1$, nous voyons que ce coefficient est aussi donné par :

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{(EX_1\mathrm{sign}(X_2))(EX_2\mathrm{sign}(X_1))}{E|X_1|E|X_2|} \right|^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Cette dernière expression nous donne un moyen d'estimer le coefficient de covariation symétrique signé sans une estimation préalable du α.

Proposition 3.2 *Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé possède les propriétés suivantes :*

1. $-1 \leq \operatorname{scov}(X_1, X_2) \leq 1$ *et si X_1, X_2 sont indépendants, alors* $\operatorname{scov}(X_1, X_2) = 0$;
2. *pour tout $a \neq 0$,* $|\operatorname{scov}(X, aX)| = 1$;
3. *Soient a et b deux réels non nuls, alors*

$$\operatorname{scov}(aX_1, bX_2) = \pm \operatorname{scov}_\alpha(X_1, X_2),$$

4. *pour $\alpha = 2$,* $\operatorname{scov}(X_1, X_2)$ *coïncide avec le coefficient de corrélation habituel.*

Preuve 3.3

1. *En utilisant (15) nous avons*

$$|[X_1, X_2]_\alpha| \leq \|X_1\|_\alpha \|X_2\|_\alpha^{\alpha-1} \quad \text{et} \quad |[X_2, X_1]_\alpha| \leq \|X_2\|_\alpha \|X_1\|_\alpha^{\alpha-1},$$

$$\Longrightarrow |[X_1, X_2]_\alpha| \times |[X_2, X_1]_\alpha| \leq \|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha,$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha|}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right| \leq 1.$$

En utilisant l'équation (18) nous obtenons $-1 \leq \operatorname{scov}(X_1, X_2) \leq 1$.
Si X_1 et X_2 sont indépendants, alors $[X_1, X_2]_\alpha = [X_2, X_1]_\alpha = 0$. Cela entraine que $\operatorname{scov}(X_1, X_2) = 0$.

2. *Soit $a \neq 0$, en utilisant (14) nous pouvons écrire*

$$\frac{[aX_1, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha} = \frac{a\|X_1\|_\alpha^\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha} = a \quad \text{et} \quad \frac{[X_1, aX_1]_\alpha}{\|aX_1\|_\alpha^\alpha} = \frac{a^{<\alpha-1>}\|X_1\|_\alpha^\alpha}{|a|^\alpha \|X_1\|_\alpha^\alpha} = \frac{1}{a}$$

Cela implique que $\operatorname{scov}(X, aX) = \operatorname{sign}(a) = \pm 1$ *car* $\kappa_{(X_1, X_2)} = \operatorname{sign}(a)$.

3. *Soient a et b deux réels non nuls, nous avons*

$$\frac{[aX_1, bX_2]_\alpha}{\|bX_2\|_\alpha^\alpha} = \frac{ab^{<\alpha-1>}[X_1, X_2]_\alpha}{|b|^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} = \frac{a}{b} \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{[bX_2, aX_1]_\alpha}{\|aX_1\|_\alpha^\alpha} = \frac{b}{a} \frac{[X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}.$$

Cela implique que $\left| \frac{[aX_1, bX_2]_\alpha [bX_2, aX_1]_\alpha}{\|aX_1\|_\alpha^\alpha \|bX_2\|_\alpha^\alpha} \right| = \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|$.

$\Longrightarrow |\operatorname{scov}(aX_1, bX_2)| = |\operatorname{scov}(X_1, X_2)|$. *En utilisant (19) nous avons aussi*

$$\kappa_{aX_1, bX_2} = \begin{cases} \operatorname{sign}([aX_1, bX_2]_\alpha) & \text{si} \quad \left| \frac{[aX_1, bX_2]_\alpha}{\|bX_2\|_\alpha^\alpha} \right| \geq \left| \frac{[bX_2, aX_1]_\alpha}{\|aX_1\|_\alpha^\alpha} \right|, \\ \\ \operatorname{sign}([bX_2, aX_1]_\alpha) & \text{si} \quad \left| \frac{[aX_1, bX_2]_\alpha}{\|bX_2\|_\alpha^\alpha} \right| < \left| \frac{[bX_2, aX_1]_\alpha}{\|aX_1\|_\alpha^\alpha} \right|. \end{cases}$$

Supposons que $\left|\dfrac{[aX_1, bX_2]_\alpha}{\|bX_2\|_\alpha^\alpha}\right| \geq \left|\dfrac{[bX_2, aX_1]_\alpha}{\|aX_1\|_\alpha^\alpha}\right|$

$$\Longrightarrow \frac{|[X_1, X_2]_\alpha|}{\|X_2\|_\alpha^\alpha} \geq \frac{b^2}{a^2}\frac{|[X_2, X_1]_\alpha|}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}$$

$$\Longrightarrow \frac{|[X_1, X_2]_\alpha|}{\|X_2\|_\alpha^\alpha} \geq \frac{|[X_2, X_1]_\alpha|}{\|X_1\|_\alpha^\alpha} \quad \text{si } |a| \leq |b|.$$

Alors $\kappa_{X_1,X_2} = \mathrm{sign}([X_1, X_2]_\alpha)$ *et*
$\kappa_{aX_1,bX_2} = \mathrm{sign}([aX_1, bX_2]_\alpha) = \mathrm{sign}(ab)\mathrm{sign}([X_1, X_2]_\alpha)$*, ce qui implique que*

$$\mathrm{scov}(aX_1, bX_2) = \begin{cases} \mathrm{scov}(X_1, X_2) & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont de signe identique,} \\ -\mathrm{scov}(X_1, X_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. *Si* $\alpha = 2$, $[X_1, X_2]_2 = [X_2, X_1]_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ *et* $\kappa_{(X_1,X_2)} = \mathrm{sign}(\mathrm{Cov}(X_1, X_2))$. *Alors*

$$\mathrm{scov}(X_1, X_2) = \mathrm{sign}(\mathrm{Cov}(X_1, X_2))\left|\frac{[\mathrm{Cov}(X_1, X_2)]^2}{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)}\right|^{\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\mathrm{Var}(X_1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Var}(X_2)^{\frac{1}{2}}},$$

c'est le coefficient de corrélation habituel.

3.1 Cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens

Soient $0 < \alpha < 2$, G_1, G_2 des variables conjointement normales de moyenne nulle et A une variable aléatoire positive, indépendante de (G_1, G_2), telle que $A \sim S_{\alpha/2}\big(\big(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\big)^{2/\alpha}, 1, 0\big)$. Alors $\mathbf{X} = A^{1/2}\mathbf{G} = (A^{1/2}G_1, A^{1/2}G_2)$ est un vecteur aléatoire α-stable appelé sous-gaussien de vecteur gaussien sous-jacent $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$. La fonction caractéristique de $\mathbf{X}$ est donnée par :

$$E\exp\Big\{i\sum_{k=1}^{2}\theta_k X_k\Big\} = \exp\Big\{-\Big|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\theta_i\theta_j R_{ij}\Big|^{\alpha/2}\Big\}, \tag{21}$$

où les $R_{ij} = EG_iG_j$, $i, j = 1, 2$ sont les covariances du vecteur gaussien sous-jacent $\mathbf{G}$ ([8], p. 78). En utilisant (4) et (5) nous voyons que le paramètre d'échelle $\gamma(\theta_i, \theta_j)$ de $Y = \theta_i X_i + \theta_j X_j$, $i, j = 1, 2$, est donné par

$$\gamma^\alpha(\theta_i, \theta_j) = 2^{-\alpha/2}(\theta_i^2 R_{ii} + 2\theta_i\theta_j R_{ij} + \theta_j^2 R_{jj})^{\alpha/2}.$$

En utilisant (13), nous voyons que

$$[X_i, X_j]_\alpha = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\gamma^\alpha(\theta_i, \theta_j)}{\partial\theta_i}\Big|_{\theta_i=0,\theta_j=1} = 2^{-\alpha/2}R_{ij}R_{jj}^{(\alpha-2)/2}. \tag{22}$$

De (22) nous avons aussi

$$\gamma_i = \|X_i\|_\alpha = ([X_i, X_i]_\alpha)^{1/\alpha} = 2^{-1/2} R_{ii}^{1/2}, \quad i = 1, 2. \tag{23}$$

(voir Samorodnitsky et Taqqu, 1994 pages 78, 89).

Avant de montrer que, dans ce cas, le gap de Paulauskas, le paramètre d'association de Press et le coefficient de covariation symétrique signé coïncident, établissons d'abord le lemme suivant.

Lemme 3.4 *Soient* $1 < \alpha < 2$ *et* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *vecteur sous gaussien de fonction caractéristique (21). Alors le gap et le paramètre d'association entre les composantes de* $\boldsymbol{X}$ *coïncident avec le coefficient de corrélation entre les composantes de* $\boldsymbol{G}$.

Preuve 3.5 *En utilisant la fonction caractéristique de* $\boldsymbol{X}$ *donnée par (21), nous avons*

$$\begin{aligned}\Phi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\theta}) &= \exp\left\{-\left|2^{-1}R_{11}\theta_1^2 + R_{12}\theta_1\theta_2 + 2^{-1}R_{22}\theta_2^2\right|^{\alpha/2}\right\} \\ &= \exp\left\{-\left|2^{-1}R_{11}\theta_1^2 + rR_{11}^{1/2}R_{11}^{1/2}\theta_1\theta_2 + 2^{-1}R_{22}\theta_2^2\right|^{\alpha/2}\right\} \\ &= \exp\left\{-\left|\gamma_1^2\theta_1^2 + 2r\gamma_1\gamma_2\theta_1\theta_2 + \gamma_2^2\theta_2^2\right|^{\alpha/2}\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

où r *est le coefficient de corrélation entre les composantes du vecteur gaussien sous-jacent* $\boldsymbol{G}$. *Cette fonction caractéristique est équivanlente à celle donnée dans (11), en posant* $C = \pm 1$. *Donc* r *est le gap entre* X_1 *et* X_2. *Posons* $m = 1$ *dans (8), cette fonction caractéristique est équivalente à (24) et en utilisant (9), nous obtenons* $\rho = r$.

Proposition 3.6 *Soient* $1 < \alpha < 2$ *et* $\boldsymbol{X}$ *vecteur sous gaussien de fonction caractéristique (21), alors le coefficient de covariation symétrique signé coïncide avec le gap et le paramètre d'association entre les composantes de* $\boldsymbol{X}$. *Dans ce cas,* $\operatorname{scov}(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow$ *la distribution de* $\boldsymbol{X}$ *est concentrée sur une ligne.*

Preuve 3.7 *(a) En utilisant (22) et (23), nous avons*

$$\frac{[X_i, X_j]_\alpha}{\|X_j\|_\alpha^\alpha} = \frac{2^{-\alpha/2} R_{ij} R_{jj}^{(\alpha-2)/2}}{2^{-\alpha/2} R_{jj}^{\alpha/2}} = \frac{R_{ij}}{R_{jj}}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Ici $\kappa_{(X_1,X_2)} = \operatorname{sign}(R_{12})$ *car* $\operatorname{sign}([X_1, X_2]_\alpha) = \operatorname{sign}([X_2, X_1]_\alpha) = \operatorname{sign}(R_{12})$. *En le remplaçant dans (18), nous avons*

$$\operatorname{scov}(X_1, X_2) = \operatorname{sign}(R_{12})\Big(\frac{R_{12}^2}{R_{11}R_{22}}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{R_{12}}{R_{11}^{1/2}R_{22}^{1/2}} = r.$$

Ainsi le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2 coïncide avec le coefficient de corrélation entre les composantes du vecteur gaussien sous-jacent. Le lemme 3.4

termine la première partie de la démonstration.

(b) Soient X_1 et X_2 telles que $\operatorname{scov}(X_1, X_2) = \pm 1$, *cela est équivalent à $r = \pm 1$, où r est le coefficient de corrélation du vecteur gaussien sous-jacent $\boldsymbol{G}$. Cela implique qu'il existe $a \neq 0$ tel que $G_2 = aG_1$, car G_1 et G_2 sont conjointement des variables aléatoires de moyenne nulle. Ainsi, pour toute variable aléatoire stable positive $A \sim S_{\alpha/2}\big(\big(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\big)^{2/\alpha}, 1, 0\big)$, $A^{1/2}G_2 = A^{1/2}aG_1$. Par conséquent, nous avons $X_2 = aX_1$, ce qui signifie que la distribution de $\boldsymbol{X}$ est concentrée sur une ligne.*

Remarque 1 Quand $R_{11} = R_{22}$, en utilisant (22) nous observons que $[X_1, X_2]_\alpha = [X_2, X_1]_\alpha$ et le coefficient de covariation symétrique signé se réduit simplement au coefficient de covariation ordinaire entre X_1 et X_2. Il en résulte que dans ce cas le coefficeint de covariation, le gap et le paramètre d'association coïncident.

3.2 Cas des combinaisons linéaires de variables aléatoires $S\alpha S$ indépandantes

Soient $1 < \alpha \leq 2$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_k \sim S_\alpha(\gamma_k, 0, 0), k = 1, 2$. Soit $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$, $1 \leq j \leq k \leq 2$, une matrice réelle. Le vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = \mathbf{AX}$, dont les composantes sont des combinaisons linéaires

$$Y_j = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} X_k, \quad j = 1, 2, \tag{25}$$

des X_k, est α-stable et sa fonction caractéristique est donnée par

$$\begin{aligned}
E\exp\Big\{i\sum_{j=1}^{2}\theta_j Y_j\Big\} &= E\exp\Big\{i\sum_{k=1}^{2}\Big(\sum_{j=1}^{2}\theta_j a_{jk}\Big)X_k\Big\} \\
&= \prod_{k=1}^{2} E\exp\Big\{i\Big(\sum_{j=1}^{2}\theta_j a_{jk}\Big)X_k\Big\} \\
&= \exp\Big\{-\sum_{k=1}^{2}\gamma_k^\alpha\Big|\sum_{j=1}^{2}\theta_j a_{jk}\Big|^\alpha\Big\} \\
&= \exp\Big\{-\int_{S_2}|\theta_1 s_1 + \theta_2 s_2|^\alpha \boldsymbol{\Gamma}(d\mathbf{s})\Big\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

La proposition suivante donne l'expression du coefficient de covariation symétrique signé dans ce cas. Nous supposons $\gamma_1 = \gamma_2$.

Proposition 3.8 *Soient $1 < \alpha \leq 2$ et $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX}$ un vecteur aléatoire α-stable, alors le coefficient de covariation symétrique signé est donné par :*

$$scov(Y_1, Y_2) = \kappa_{(Y_1,Y_2)} \frac{\left| |a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22})^{\langle\alpha-1\rangle} \right|^{\frac{1}{2}}}{\Big(|a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + |a_{12}a_{21}|^\alpha + |a_{11}a_{22}|^\alpha\Big)^{1/2}}. \tag{27}$$

Le paramètre d'association est :

$$\rho = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{[(a_{11}^2 + a_{12}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2)]^{1/2}}, \tag{28}$$

et le gap est donné par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{a_{11}a_{21}(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}a_{22}(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\Big[\Big(a_{11}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\Big)\Big(a_{21}^2(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{22}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}}. \tag{29}$$

Preuve 3.9 *D'abord, établissons la relation (27).*

$$\begin{aligned}
\frac{[Y_1, Y_2]_\alpha}{\|Y_2\|_\alpha^\alpha} &= \frac{[a_{11}X_1 + a_{12}X_2, a_{21}X_1 + a_{22}X_2]_\alpha}{[a_{21}X_1 + a_{22}X_2, a_{21}X_1 + a_{22}X_2]_\alpha^\alpha} \\
&= \frac{a_{11}a_{21}^{\langle\alpha-1\rangle}\|X_1\|_\alpha^\alpha + a_{12}a_{22}^{\langle\alpha-1\rangle}\|X_2\|_\alpha^\alpha}{|a_{21}|^\alpha\|X_1\|_\alpha^\alpha + |a_{22}|^\alpha\|X_2\|_\alpha^\alpha} \qquad (\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendants }), \\
&= \frac{a_{11}a_{21}^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{12}a_{22}^{\langle\alpha-1\rangle}}{|a_{21}|^\alpha + |a_{22}|^\alpha} \qquad (\text{ car } \ \|X_1\|_\alpha = \|X_2\|_\alpha\ ).
\end{aligned}$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{scov}(Y_1, Y_2) &= \kappa_{(Y_1,Y_2)} \left| \frac{a_{11}a_{21}^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{12}a_{22}^{\langle\alpha-1\rangle}}{|a_{21}|^\alpha + |a_{22}|^\alpha} \times \frac{a_{21}a_{11}^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{22}a_{12}^{\langle\alpha-1\rangle}}{|a_{11}|^\alpha + |a_{12}|^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}} \\
&= \kappa_{(Y_1,Y_2)} \frac{\left| |a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22})^{\langle\alpha-1\rangle} \right|^{\frac{1}{2}}}{\Big(|a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + |a_{12}a_{21}|^\alpha + |a_{11}a_{22}|^\alpha\Big)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

De (26), nous avons

$$\Phi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{\theta}) = \exp\Big\{ -\sum_{k=1}^{2} \Big(\gamma_k^2\big[a_{1k}^2\theta_1^2 + 2a_{11}a_{21}\theta_1\theta_2 + a_{21}^2\theta_2^2\big]\Big)^{\alpha/2}\Big\}.$$

Cette fonction caractéristique est équivalente à (8) en posant $m = 2$. Ici $w_{ij}(k) = a_{ik}a_{jk}\gamma_k^2$, $i, j, k = 1, 2$. Les matrices $\mathbf{\Omega}_k = \big(w_{ij}(k)\big)_{1\le i\le j\le 2}$, $k = 1, 2$ sont symétriques semi-définies positives de dimension 2×2. Alors (9) définit le paramètre d'association et nous avons

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{a_{11}a_{21}\gamma_1^2 + a_{12}a_{22}\gamma_2^2}{\big[(a_{11}^2\gamma_1^2 + a_{12}^2\gamma_2^2)(a_{21}^2\gamma_1^2 + a_{22}^2\gamma_2^2)\big]^{1/2}} \\ &= \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{\big[(a_{11}^2 + a_{12}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2)\big]^{1/2}} \qquad \text{en posant} \quad \gamma_1 = \gamma_2 \ ;\end{aligned}$$

ce qui prouve (28).
Puisque $\boldsymbol{Y}$ est une transformation linéaire de variables aléatoires α-stables indépendantes, sa mesure spectrale est discrète et concentée en $m = 2$ paires de points symétriques de S_2 (Voir [8] p. 69-70). En tenant compte de la supposition $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, cette mesure spectrale est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{2}\gamma\sum_{k=1}^{2}\big(a_{1k}^2 + a_{2k}^2\big)^{\alpha/2}\Big[\delta\Big(&\frac{a_{1k}}{(a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{1/2}}, \frac{a_{2k}}{(a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{1/2}}\Big) \\ &+ \delta\Big(\frac{-a_{1k}}{(a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{1/2}}, \frac{-a_{2k}}{(a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{1/2}}\Big)\Big]\end{aligned}$$

où $\delta(a, b)$ est la mesure de Dirac au point (a, b). Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma}/\mathbf{\Gamma}(S_2)$. Cette distribution est discrète telle que les points symétriques

$$\Big(\frac{a_{1k}}{(a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{1/2}}, \frac{a_{2k}}{(a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{1/2}}\Big) \text{ et } \Big(\frac{-a_{1k}}{(a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{1/2}}, \frac{-a_{2k}}{(a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{1/2}}\Big) \text{ sont de même}$$

$$\text{probabilité} \quad \frac{(a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{\alpha/2}}{2\big[(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\alpha/2} + (a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\alpha/2}\big]}, \quad k = 1, 2.$$

Alors nous obtenons

$$\begin{aligned}E(U_1U_2) &= \frac{a_{11}a_{21}}{(a_{11}^2 + a_{21}^2)}\frac{(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\alpha/2}}{\big[(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\alpha/2} + (a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\alpha/2}\big]} \\ &\qquad + \frac{a_{12}a_{22}}{(a_{12}^2 + a_{22}^2)}\frac{(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\alpha/2}}{\big[(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\alpha/2} + (a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\alpha/2}\big]} \\ &= \frac{a_{11}a_{21}(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} + a_{12}a_{22}(a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\big[(a_{11}^2 + a_{21}^2)^{\alpha/2} + (a_{12}^2 + a_{22}^2)^{\alpha/2}\big]};\end{aligned}$$

$$EU_1^2 = \frac{a_{11}^2}{(a_{11}^2+a_{21}^2)} \frac{(a_{11}^2+a_{21}^2)^{\alpha/2}}{\left[(a_{11}^2+a_{21}^2)^{\alpha/2}+(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\alpha/2}\right]} + \frac{a_{12}^2}{(a_{12}^2+a_{22}^2)} \frac{(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\alpha/2}}{\left[(a_{11}^2+a_{21}^2)^{\alpha/2}+(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\alpha/2}\right]}$$

$$= \frac{a_{11}^2(a_{11}^2+a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}+a_{12}^2(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\left[(a_{11}^2+a_{21}^2)^{\alpha/2}+(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\alpha/2}\right]}$$

et finalement

$$EU_2^2 = \frac{a_{21}^2(a_{11}^2+a_{21}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}+a_{22}^2(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\left[(a_{11}^2+a_{21}^2)^{\alpha/2}+(a_{12}^2+a_{22}^2)^{\alpha/2}\right]}.$$

De (10) nous obtenons (29).

Notons que dans ce cas le paramètre d'association est indépendant de α. Nous avons aussi

$$|\mathrm{scov}| = 1 \Leftrightarrow |\widetilde{\rho}| = 1 \Leftrightarrow |\rho| = 1.$$

C'est une conséquence de la propriété suivante. Nous supposons $\gamma_1 = \gamma_2$.

Propriété 3.10 *Soient $1 < \alpha \leq 2$ et $\boldsymbol{Y}$ un vecteur aléatoire α-stable dont les composantes sont définies comme dans (25). Si $|\mathrm{scov}(Y_1, Y_2)| = 1$ alors la distribution de $\boldsymbol{Y}$ est concentrée sur une ligne.*

Preuve 3.11 *En utilisant (27)*

$$|\mathrm{scov}(Y_1,Y_2)| = 1 \Leftrightarrow \Big| |a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22})^{\langle\alpha-1\rangle} \Big| = |a_{11}a_{21}|^\alpha + |a_{12}a_{22}|^\alpha + |a_{12}a_{21}|^\alpha + |a_{11}a_{22}|^\alpha.$$

1. *Si l'expression en valeur absolue est positive, alors $|\mathrm{scov}(Y_1, Y_2)| = 1$*

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow a_{11}a_{22}(a_{12}a_{21})^{\langle\alpha-1\rangle} + a_{12}a_{21}(a_{11}a_{22})^{\langle\alpha-1\rangle} - |a_{12}a_{21}|^\alpha - |a_{11}a_{22}|^\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[a_{11}a_{22}\mathrm{sign}(a_{12}a_{21}) - |a_{12}a_{21}|\right]|a_{12}a_{21}|^{\alpha-1} \\
&\qquad + \left[a_{12}a_{21}\mathrm{sign}(a_{11}a_{22}) - |a_{11}a_{22}|\right]|a_{11}a_{22}|^{\alpha-1} = 0 \qquad (30) \\
&\Leftrightarrow \left[\mathrm{sign}(a_{11}a_{22})\mathrm{sign}(a_{12}a_{21})|a_{11}a_{22}| - |a_{12}a_{21}|\right]|a_{12}a_{21}|^{\alpha-1} \\
&\qquad + \left[\mathrm{sign}(a_{11}a_{22})\mathrm{sign}(a_{12}a_{21})|a_{12}a_{21}| - |a_{11}a_{22}|\right]|a_{11}a_{22}|^{\alpha-1} = 0
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{sign}(a_{11}a_{22})\mathrm{sign}(a_{12}a_{21}) = -1$ *est impossible, il reste deux cas.*

- *Si $\mathrm{sign}(a_{11}a_{22})\mathrm{sign}(a_{12}a_{21}) = 0$, cela signifie qu'au moins un des a_{ij}, $i, j = 1, 2$ est nul. Supposons que $a_{11} = 0$ et utilisons (30), nous avons $|a_{12}a_{21}| = 0$. Cela implique que seulement $a_{21} = 0$ (car déduire $a_{12} = 0$ reduirait* $\mathrm{scov}(Y_1, Y_2)$ *à zéro, ce qui est absurde). Alors $Y_2 = \dfrac{a_{22}}{a_{12}} Y_1 = cY_1$, et ainsi la distribution de $\boldsymbol{Y}$ est concentrée sur une droite réelle.*

– *Si* $\operatorname{sign}(a_{11}a_{22})\operatorname{sign}(a_{12}a_{21}) = 1$, *de (30) nous avons* $|\operatorname{scov}(Y_1, Y_2)| = 1$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \big[|a_{11}a_{22}| - |a_{12}a_{21}|\big]\,|a_{12}a_{21}|^{\alpha-1} + \big[|a_{12}a_{21}| - |a_{11}a_{22}|\big]\,|a_{11}a_{22}|^{\alpha-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \big(|a_{11}a_{22}| - |a_{12}a_{21}|\big)\big(|a_{12}a_{21}|^{\alpha-1} - |a_{11}a_{22}|^{\alpha-1}\big) \\
&\Leftrightarrow |a_{11}a_{22}| = |a_{12}a_{21}| \\
&\Leftrightarrow a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

2. *Si l'expression en valeur absolue est négative, nous montrons de manière analogue que* $|\operatorname{scov}(Y_1, Y_2)| = 1 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$. *Nous distinguerons deux cas possibles : Quand* $\operatorname{sign}(a_{11}a_{22})\operatorname{sign}(a_{12}a_{21}) = 0$ *et quand* $\operatorname{sign}(a_{11}a_{22})\operatorname{sign}(a_{12}a_{21}) = -1$.

Pour tous les cas possibles nous avons $|\operatorname{scov}(Y_1, Y_2)| = 1 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$. *De cette égalité nous pouvons écrire* $Y_2 = cY_1$ *où* $c = \frac{a_{21}}{a_{11}}$, *ce qui veut dire que la distribution de* $\boldsymbol{Y}$ *est concentrée sur une ligne.*

4 Estimation du coefficient de covariation symétrique signé

Un premier estimateur que nous proposons ici pour le coefficient de covariation symétrique signé est

$$
\widehat{\operatorname{scov}}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1,X_2)} \frac{\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\operatorname{sign}(X_{2i})\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\operatorname{sign}(X_{1i})\right)\right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|X_{1i}|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|X_{2i}|\right)\right]^{1/2}} \tag{31}
$$

où les couples $(X_{11}, X_{21}), ..., (X_{1n}, X_{2n})$ sont des observations de (X_1, X_2) indépendantes. De la loi forte des grands nombres nous avons :

$$
\frac{|X_{1,1}| + \cdots + |X_{1,n}|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.\text{ et } L_1} E|X_{1,n}|
$$

et

$$
\frac{X_{11}\operatorname{sign}(X_{21}) + \cdots + X_{1n}\operatorname{sign}(X_{2n})}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.\text{ et } L_1} E(X_{1i}\operatorname{sign}(X_{2i}))
$$

Il en résulte que l'estimateur (31) converge presque sûrement vers le coefficient de covariation symétrique signé quand $n \to \infty$. Cet estimateur présente l'avantage de ne dépendre, ni d'une estimation de α ni de celle de la mesure spectrale du vecteur (X_1, X_2). Dans un contexte sous-gaussien, il s'agit aussi d'un estimateur du gap. Toutefois ce n'est pas le cas en général.

Un autre estimateur du coefficient de covariation symétrique signé, de la même forme que le précédent mais basé sur une estimation des “screened ratio”, est le suivant :

$$\widehat{\text{scov}}^{SR}(X_1,X_2)=\widehat{\kappa}_{(X_1,X_2)}\frac{\left|\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}^{-1}\mathbb{I}_{]c_1,c_2[}(|X_{2i}|)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}X_{1i}^{-1}\mathbb{I}_{]c_1,c_2[}(|Y_i|)\right)\right|^{1/2}}{\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{]c_1,c_2[}(|X_{1i}|)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{]c_1,c_2[}(|X_{2i}|)\right)\right]^{1/2}}, \tag{32}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. On pose le plus souvent $c_1 > 0$ et $c_2 = \infty$. Kanter et Steiger [4] ont montré que quand $n \to \infty$, un estimateur basé sur les screened ratio converge presque-sûrement vers le coefficient de linéarité de la régression $E(X_1|X_2)$ qui est aussi le coefficient de projection de Kanter. Il en résulte que (32) converge presque-sûrement vers le coefficient de covariation symétrique signé.

Les tableaux qui suivent nous permettent de faire une comparaison des performances de ces deux estimateurs dans le cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens et des combinaisons linéaires de variables indépendantes avec $\alpha > 1$.

4.1 Cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens bivariés

Dans ce cas, les estimateurs (31) et (32) sont aussi des estimateurs du gap et du paramètre d'association car la proposition 3.6 donne l'égalité entre ces coefficients.
Rappelons que nous générons un vecteur aléatoire sous-gaussien bivarié à l'aide de la définition suivante $\mathbf{X} = (X_1, X_2) = (A^{1/2}G_1, A^{1/2}G_2)$ où $A \sim S_{\alpha/2}\big(\big(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\big)^{2/\alpha}, 1, 0\big)$. Les paramètres γ_1 et γ_2 désignent respectivement les paramètres d'échelle de X_1 et X_2. La taille de l'échantillon bivarié est n et le nombre de réplications dans chaque cas est fixé à 100. Dans l'expression (32) nous posons $c_1 = 1$ et $c_2 = \infty$. Dans les tableaux qui suivent, la valeur indiquée pour les estimations représente la moyenne des valeurs obtenues sur les 100 réplications. Les valeurs entre parenthèses sont les écarts arithmétiques moyens à la moyenne figurant au dessus.

Données	$\alpha = 1.3$, n=100, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$										
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.79 0.09	-0.58 0.17	-0.34 0.18	-0.20 0.20	-0.04 0.17	0.09 0.18	0.29 0.23	0.47 0.18	0.73 0.11	0.88 0.07
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.78 0.27	-0.64 0.25	-0.46 0.29	-0.22 0.39	-0.04 0.34	0.14 0.36	0.37 0.32	0.52 0.31	0.75 0.28	0.94 0.20

Données	$\alpha = 1.3$, n=250, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$										
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.78 0.09	-0.58 0.12	-0.42 0.15	-0.21 0.17	-0.04 0.17	0.11 0.18	0.25 0.16	0.50 0.11	0.68 0.12	0.90 0.04
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.81 0.17	-0.63 0.22	-0.42 0.21	-0.27 0.23	-0.01 0.28	0.17 0.25	0.33 0.20	0.63 0.25	0.72 0.17	0.89 0.13

Données	$\alpha = 1.3$, n=500, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$										
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.77 0.09	-0.60 0.10	-0.40 0.13	-0.21 0.14	0.00 0.14	0.09 0.14	0.29 0.13	0.46 0.14	0.67 0.10	0.88 0.06
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.76 0.14	-0.61 0.17	-0.40 0.16	-0.27 0.14	-0.00 0.20	0.12 0.18	0.31 0.18	0.52 0.17	0.70 0.17	0.89 0.09

Données	$\alpha = 1.5$, n=100, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$										
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.79 0.07	-0.57 0.13	-0.40 0.14	-0.22 0.16	0.02 0.16	0.07 0.18	0.26 0.18	0.48 0.13	0.65 0.13	0.89 0.05
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.81 0.25	-0.60 0.25	-0.41 0.32	-0.26 0.31	0.02 0.41	0.10 0.37	0.36 0.39	0.53 0.30	0.67 0.25	0.89 0.22

Données	$\alpha = 1.5$, n=250, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$										
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.81 0.04	-0.60 0.08	-0.40 0.10	-0.20 0.12	-0.02 0.12	0.09 0.11	0.29 0.11	0.49 0.10	0.69 0.07	0.90 0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.80 0.23	-0.57 0.19	-0.44 0.18	-0.17 0.23	0.02 0.27	0.13 0.24	0.34 0.19	0.50 0.18	0.68 0.19	0.88 0.14

Données	$\alpha = 1.5$, n=500, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$										
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 0.00	-0.79 0.06	-0.61 0.06	-0.39 0.11	-0.19 0.08	0.02 0.10	0.10 0.10	0.28 0.09	0.48 0.07	0.71 0.04	0.90 0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00 0.00	-0.78 0.14	-0.60 0.18	-0.40 0.15	-0.25 0.14	-0.00 0.17	0.14 0.17	0.34 0.13	0.49 0.14	0.69 0.16	0.91 0.09

Données	$\alpha = 1.7$, n=100, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$										
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.80	-0.59	-0.41	-0.19	0.00	0.11	0.28	0.48	0.70	0.90
	0.00	0.05	0.10	0.11	0.12	0.11	0.13	0.12	0.10	0.07	0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.80	-0.66	-0.44	-0.20	-0.02	0.25	0.36	0.51	0.72	0.91
	0.00	0.23	0.27	0.28	0.33	0.40	0.36	0.35	0.28	0.25	0.19

Données	$\alpha = 1.7$, n=250, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$										
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.80	-0.60	-0.39	-0.20	-0.01	0.10	0.31	0.50	0.71	0.90
	0.00	0.04	0.06	0.07	0.08	0.08	0.08	0.09	0.07	0.05	0.02
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.80	-0.61	-0.43	-0.26	-0.00	0.15	0.32	0.53	0.71	0.89
	0.00	0.15	0.21	0.19	0.19	0.25	0.22	0.20	0.18	0.18	0.12

Données	$\alpha = 1.7$, n=500, $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 150$										
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.80	-0.60	-0.42	-0.20	-0.01	0.10	0.29	0.49	0.70	0.90
	0.00	0.03	0.04	0.05	0.06	0.06	0.07	0.07	0.05	0.04	0.02
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.77	-0.61	-0.43	-0.19	-0.00	0.11	0.31	0.52	0.70	0.90
	0.00	0.13	0.15	0.17	0.14	0.18	0.16	0.14	0.16	0.13	0.09

4.2 Cas de combinaisons linéaires de variables aléatoires $S\alpha S$ indépendantes

La proposition 3.8 montre que dans ce cas, le coefficient de covariation symétrique signé n'est pas égal au gap en général. En utilisant les estimateurs (31) et (32), nous n'estimons que le coefficient de covariation symétrique signé. Ici nous posons $c_1 = 50$.

Données	$\alpha = 1.3$, n=100, $\gamma = 10$										
a_{11}	100	20	12	-12	2	1	-10	-10	-10	42	9
a_{12}	16	45	-17	3	2	0	8	30	22	12	-17
a_{21}	-50	-12	1	6	-22	0	2	17	2	2	29
a_{22}	-8	-2	12	5	10	10	5	18	5	20	-10
scov	-1.00	-0.81	-0.60	-0.41	-0.21	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.76	-0.57	-0.44	-0.21	0.02	0.09	0.33	0.50	0.62	0.88
	0.00	0.07	0.20	0.17	0.18	0.19	0.22	0.22	0.16	0.09	0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.79	-0.59	-0.38	-0.26	-0.03	0.09	0.33	0.49	0.67	0.89
	0.00	0.17	0.11	0.12	0.11	0.20	0.15	0.15	0.10	0.23	0.10

Données	$\alpha = 1.3$, n=250, $\gamma = 10$										
a_{11}	100	20	12	-12	2	1	-10	-10	-10	42	9
a_{12}	16	45	-17	3	2	0	8	30	22	12	-17
a_{21}	-50	-12	1	6	-22	0	2	17	2	2	29
a_{22}	-8	-2	12	5	10	10	5	18	5	20	-10
scov	-1.00	-0.81	-0.60	-0.41	-0.21	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.77	-0.62	-0.41	-0.26	-0.02	0.17	0.30	0.52	0.68	0.89
	0.00	0.05	0.11	0.14	0.14	0.13	0.23	0.16	0.15	0.07	0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.80	-0.61	-0.40	-0.22	-0.02	0.10	0.30	0.49	0.70	0.91
	0.00	0.10	0.08	0.08	0.08	0.15	0.12	0.11	0.07	0.15	0.07

Données	$\alpha = 1.3$, n=500, $\gamma = 10$										
a_{11}	100	20	12	-12	2	1	-10	-10	-10	42	9
a_{12}	16	45	-17	3	2	0	8	30	22	12	-17
a_{21}	-50	-12	1	6	-22	0	2	17	2	2	29
a_{22}	-8	-2	12	5	10	10	5	18	5	20	-10
scov	-1	-0.81	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.79	-0.60	-0.44	-0.25	-0.00	0.12	0.29	0.52	0.66	0.89
	0.00	0.04	0.13	0.13	0.12	0.12	0.18	0.15	0.09	0.05	0.02
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.81	-0.59	-0.41	-0.21	0.03	0.10	0.30	0.50	0.70	0.91
	0.00	0.08	0.05	0.06	0.07	0.14	0.09	0.08	0.04	0.08	0.05

Données	$\alpha = 1.5$, n=100, $\gamma = 10$										
a_{11}	100	30	12	2	2	10	-13	-11	-12	22	9
a_{12}	16	45	-17	2	2	0	9	13	21	12	-17
a_{21}	-50	-12	2	-39	-18	0	2	2	2	2	19
a_{22}	-8	-2	12	10	10	10	5	4	5	20	-10
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.11	0.30	0.50	0.71	0.91
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.79	-0.61	-0.42	-0.23	-0.01	0.12	0.29	0.49	0.69	0.91
	0.00	0.06	0.13	0.15	0.15	0.16	0.18	0.15	0.14	0.08	0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.77	-0.60	-0.41	-0.23	-0.02	0.07	0.27	0.51	0.69	0.91
	0.00	0.13	0.11	0.15	0.11	0.24	0.18	0.12	0.09	0.15	0.07

Données	$\alpha = 1.5$, n=250, $\gamma = 100$										
a_{11}	100	30	12	2	2	10	-13	-11	-12	22	9
a_{12}	16	45	-17	2	2	0	9	13	21	12	-17
a_{21}	-50	-12	2	-39	-18	0	2	2	2	2	19
a_{22}	-8	-2	12	10	10	10	5	4	5	20	-10
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.11	0.30	0.50	0.71	0.91
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.79	-0.61	-0.43	-0.21	0.01	0.14	0.31	0.48	0.68	0.90
	0.00	0.04	0.10	0.10	0.12	0.12	0.15	0.11	0.11	0.04	0.02
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.80	-0.61	-0.38	-0.21	0.01	0.11	0.29	0.50	0.69	0.91
	0.00	0.09	0.06	0.11	0.07	0.23	0.12	0.08	0.06	0.09	0.05

Données	$\alpha = 1.5$, n=500, $\gamma = 10$										
a_{11}	100	30	12	2	2	10	-13	-11	-12	22	9
a_{12}	16	45	-17	2	2	0	9	13	21	12	-17
a_{21}	-50	-12	2	-39	-18	0	2	2	2	2	19
a_{22}	-8	-2	12	10	10	10	5	4	5	20	-10
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.11	0.30	0.50	0.71	0.91
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.79	-0.61	-0.41	-0.19	0.00	0.10	0.33	0.50	0.69	0.90
	0.00	0.03	0.06	0.09	0.11	0.09	0.14	0.07	0.09	0.04	0.02
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.80	-0.59	-0.38	-0.19	-0.00	0.10	0.31	0.49	0.71	0.91
	0.00	0.06	0.04	0.08	0.06	0.15	0.07	0.04	0.04	0.06	0.03

Données	$\alpha = 1.7$, n=100, $\gamma = 10$										
a_{11}	100	30	14	-1	1	0	-15	-12	-12	22	9
a_{12}	16	36	-17	-11	2	-23	9	11	18	15	-15
a_{21}	-50	-12	2	51	-44	-2	2	2	2	2	18
a_{22}	-8	-2	12	11	10	0	5	5	5	20	-10
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.11	0.31	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.80	-0.60	-0.39	-0.21	0.01	0.12	0.29	0.45	0.68	0.90
	0.00	0.05	0.07	0.11	0.10	0.12	0.15	0.14	0.12	0.06	0.03
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.79	-0.61	-0.37	-0.21	-0.01	0.07	0.29	0.48	0.69	0.90
	0.00	0.12	0.09	0.19	0.13	0.17	0.14	0.11	0.10	0.10	0.06

Données	$\alpha = 1.7$, n=250, $\gamma = 10$										
a_{11}	100	30	14	-1	1	0	-15	-12	-12	22	9
a_{12}	16	36	-17	-11	2	-23	9	11	18	15	-15
a_{21}	-50	-12	2	51	-44	-2	2	2	2	2	18
a_{22}	-8	-2	12	11	10	0	5	5	5	20	-10
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.11	0.31	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.80	-0.61	-0.39	-0.22	0.01	0.10	0.31	0.51	0.69	0.90
	0.00	0.03	0.06	0.05	0.07	0.08	0.10	0.09	0.07	0.04	0.02
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.81	-0.60	-0.38	-0.24	0.01	0.08	0.31	0.50	0.70	0.90
	0.00	0.07	0.06	0.10	0.10	0.11	0.09	0.06	0.07	0.08	0.04

Données	$\alpha = 1.7$, n=500, $\gamma = 100$										
a_{11}	100	30	14	-1	1	0	-15	-12	-12	22	9
a_{12}	16	36	-17	-11	2	-23	9	11	18	15	-15
a_{21}	-50	-12	2	51	-44	-2	2	2	2	2	18
a_{22}	-8	-2	12	11	10	0	5	5	5	20	-10
scov	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.11	0.31	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00	-0.80	-0.61	-0.38	-0.20	0.00	0.11	0.29	0.49	0.70	0.90
	0.00	0.02	0.04	0.05	0.06	0.06	0.08	0.07	0.06	0.03	0.01
$\widehat{\text{scov}}^{SR}$	-1.00	-0.81	-0.60	-0.38	-0.21	0.01	0.10	0.30	0.49	0.71	0.90
	0.00	0.05	0.04	0.08	0.08	0.09	0.07	0.05	0.04	0.06	0.03

Références

[1] Cambanis S. and Miller, G. (1981) Linear problems in pth order and stable processes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 41, n° 2, 43–69.

[2] Garel, B., d'Estampes L. and Tjøstheim, D. (2004) Revealing some unexpected dependence properties of linear combinations of stable random variables using symmetric covariation. *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 33 (4), 769–786.

[3] Garel, B. and Kodia, B. (2009) Signed symmetric covariation coefficient for alpha-stable dependence modeling. *C. R. Acad. Sci. Paris.* DOI 10.1016/j.crma.2009.01.013

[4] Kanter, M. and Steiger, W. L. (1974) Regression and autoregression with infinite variance. *Advanced Applied Probabilities* vol. 6, 768-783.

[5] Miller, G. (1978) Properties of certain symmetric stable distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 8 (3), 346–360.

[6] Press, S. J. (1972) Multivariate stable distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 2, 444-462.

[7] Paulauskas, V. J. (1976) Some remarks on Multivariate Stable Distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 6, 356-368.

[8] Samorodnitsky G. and Taqqu, M. S. Stable non-Gaussian random processes. *Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York-London, 1994.*

[9] Uchaikin V. V. and Zolotarev, V. M. Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications. *de Gruyter, Berlin-New York, 1999.*