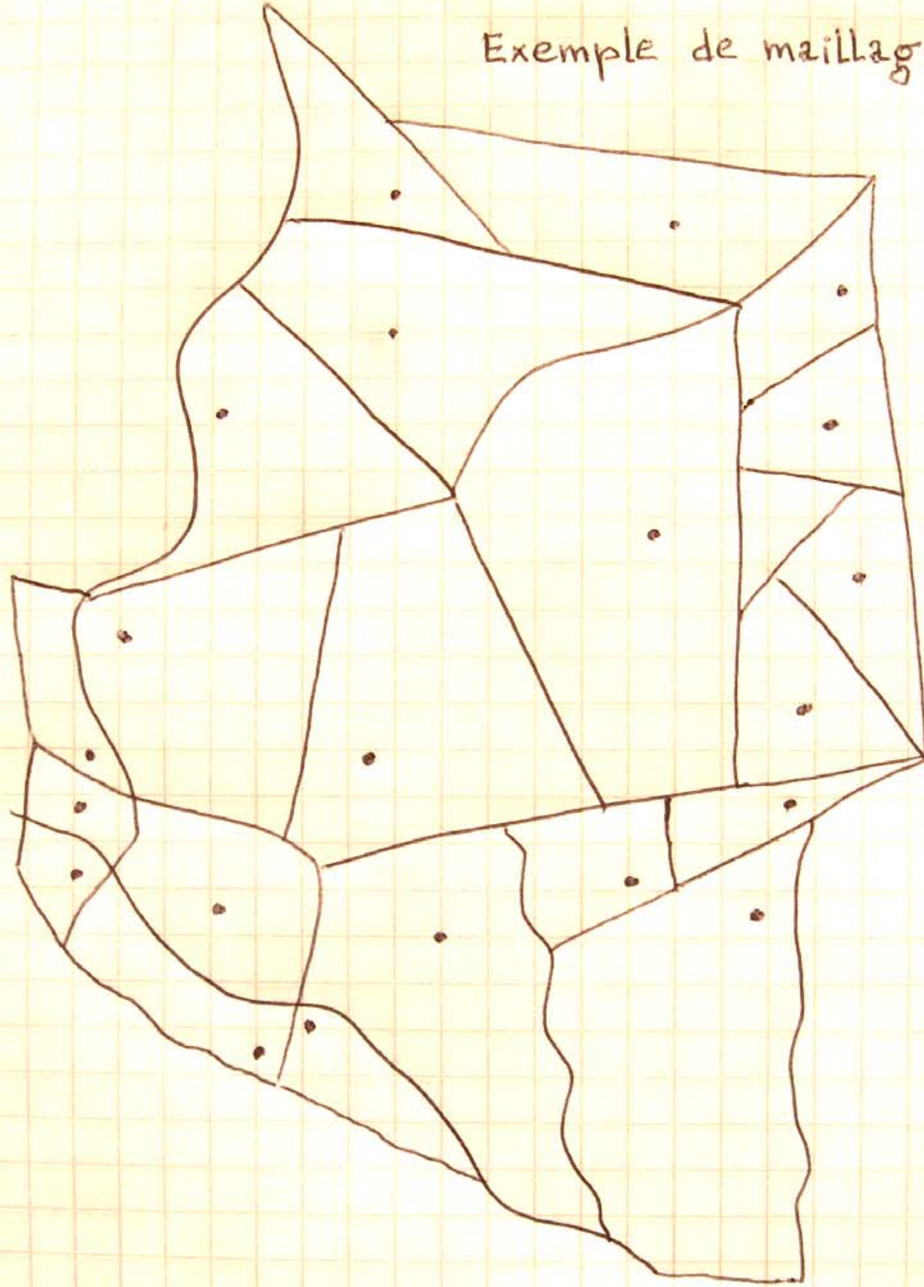
JMS 2009

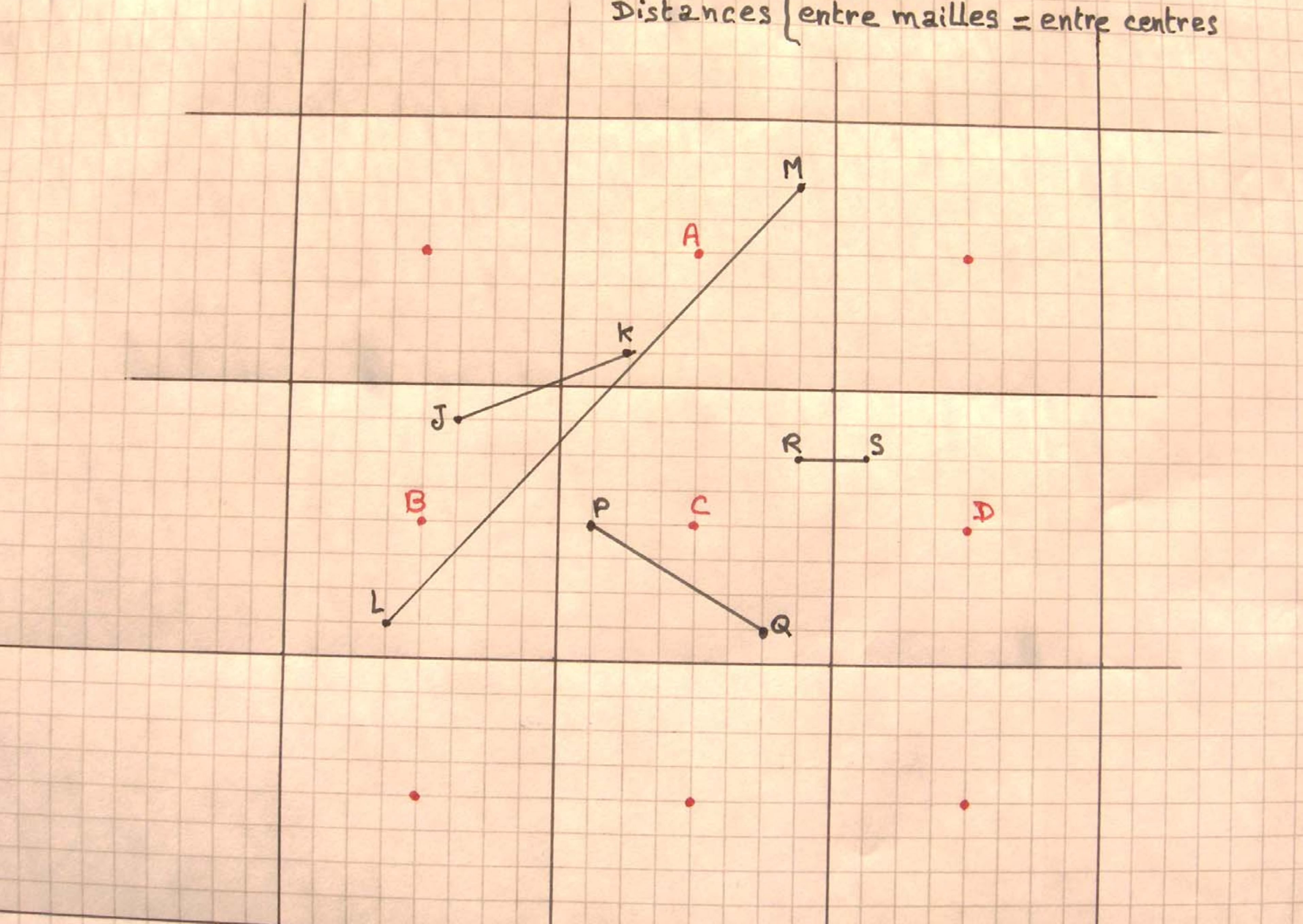
Géomathématique des flux

Christophe Terrier

Exemple de maillage

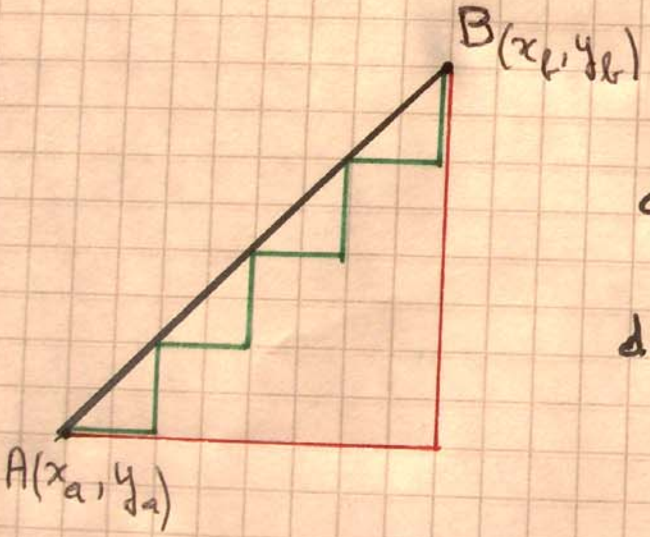


$$\text{Distances}\begin{cases}\text{Point à point}\\ \text{entre mailles = entre centres}\end{cases}$$



Distance euclidienne — (vol d'oiseau)

Distance de Manhattan { (zigzags à angles droits)

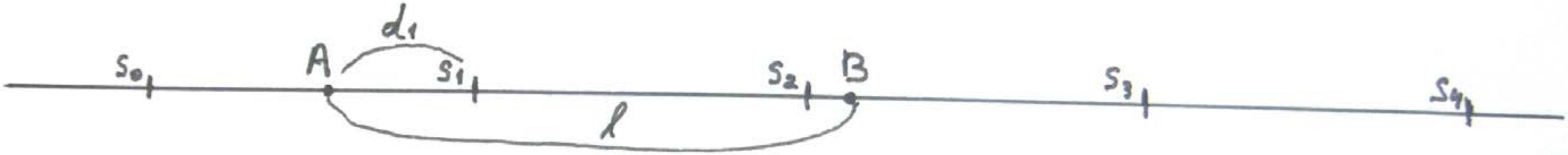


distance euclidienne $d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$

distance de Manhattan $d(A,B) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$

point A positionné sur le segment de rang a
" B " " " b

$s_0, s_1, s_2 \dots \to$ segments de longueur Δ et de rang 1, 2, 3 ....



$$l = n \times \Delta + r$$

distance entre mailles : $d = \Delta \times (\text{rang } a - \text{rang } b)$

si $r < d_1$ alors $b = a + n$

sinon $b = a + n + 1$

cas particulier :

si $l < \Delta$ <u>et</u> $r < d_1$ alors $d = 0$

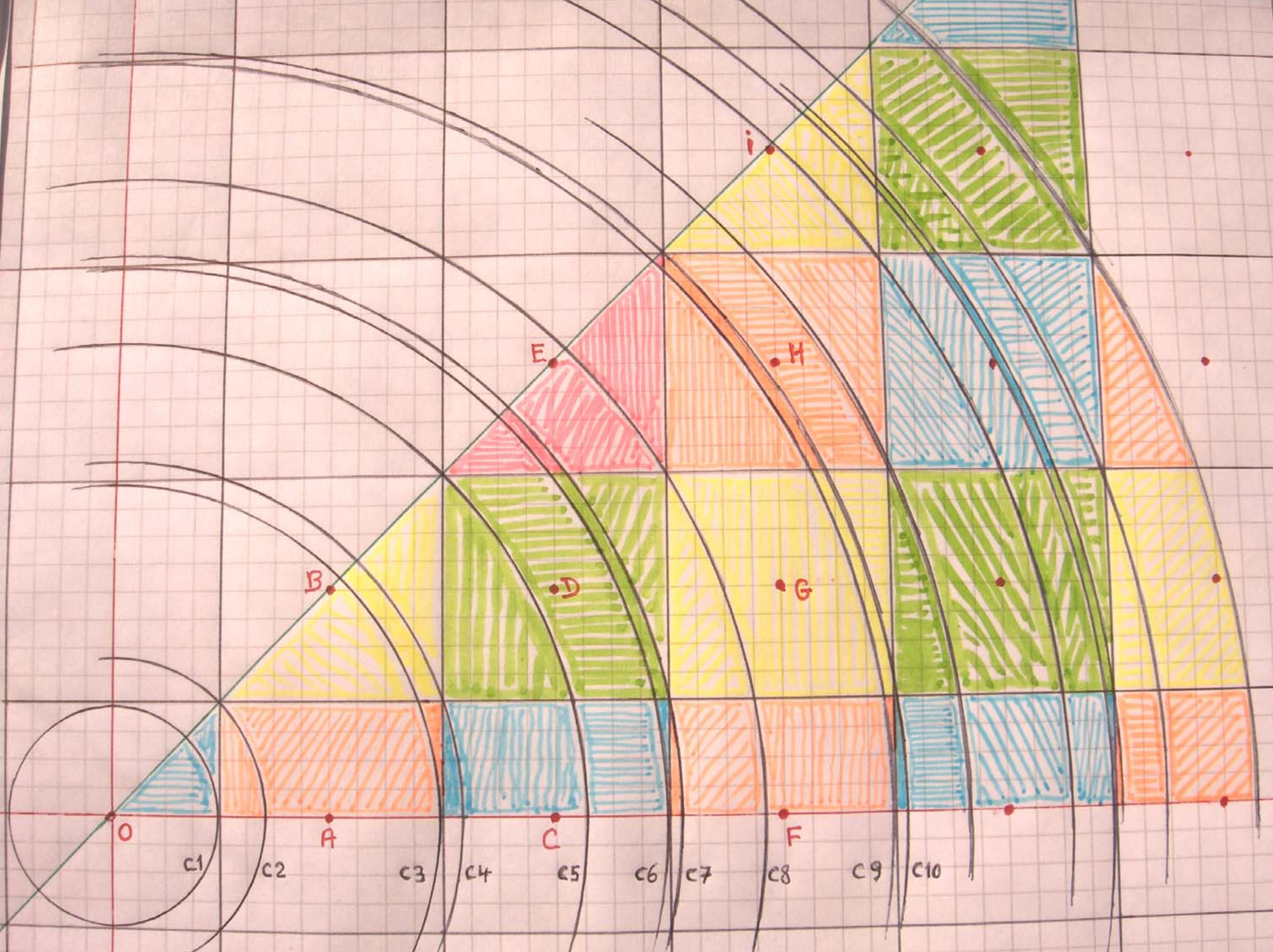
Sous les pavés, quelles plages ? (de distance)

Pavages du plan par des polygones réguliers :

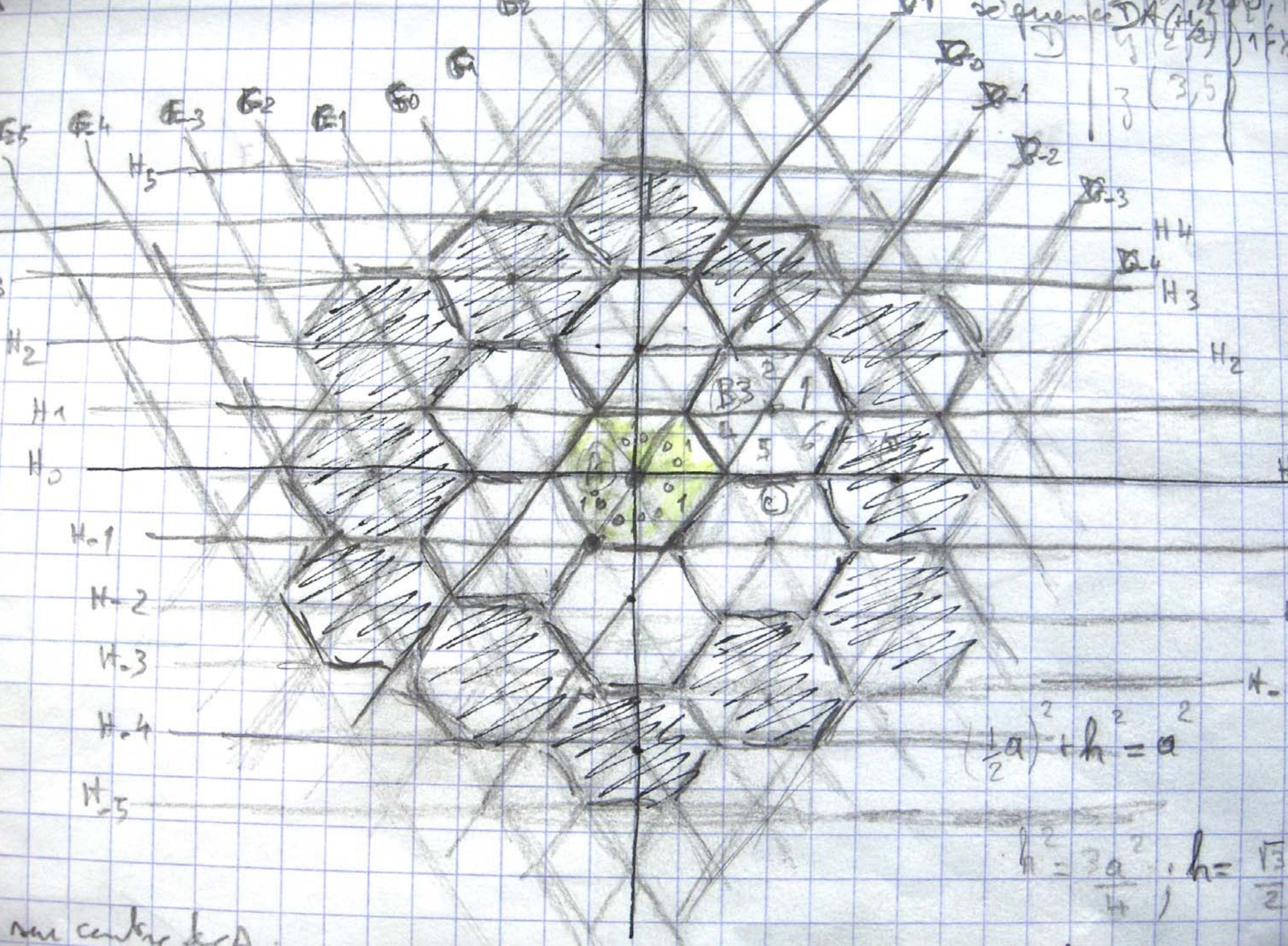
-carrés (ou rectangles ; alignés ou décalés)

-hexagones

-triangles



O
A
B
C
D
E
F
G
H
i
C1
C2
C3
C4
C5
C6
C7
C8
C9
C10



$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$$

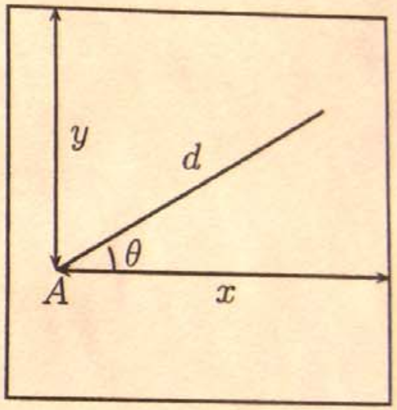
$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \; ; \; h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

… centre de A :

Problème n°95 *(proposé par Loïc Terrier)*

On lance un spaghetti de longueur d sur un sol carrelé, les carreaux étant des carrés de côté unité. Quelle est la probabilité que le spaghetti soit à l'intérieur d'un des carreaux?

Solution par Jacques Choné (Clermont-Ferrand)



Il s'agit de l'extension de Laplace du problème de l'aiguille de Buffon. Voir les références [1] et [2].
Soit A l'extrémité gauche du spaghetti (on peut négliger le cas où il est vertical, cas de probabilité nulle) et C le carré contenant A (on peut négliger le cas où A est sur la frontière d'un carré, cas de probabilité nulle). Soit x (resp. y) la distance de A à la verticale de droite de C (resp. à l'horizontale du haut de C) et θ l'angle du spaghetti avec l'horizontale.

On suppose que les variables aléatoires x, y, θ sont indépendantes et que x et y suivent la loi uniforme sur $[0,1]$ et θ la loi uniforme sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Soit E_h (resp. E_v) l'événement "“le spaghetti rencontre une droite horizontale (resp. verticale)"'.

Cas où $d \leq 1$

On a:

$$P\left(E_h \big/ 0 < \theta\right) = P\left(y < d\sin\theta \big/ 0 < \theta\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}.1.1}\int_{x=0}^{x=1}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\int_{y=0}^{y=d\sin\theta} dy.d\theta.dx$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\sin\theta.d\theta = \frac{2d}{\pi}$$

Problème n°95bis *(proposé par Loïc Terrier)*

On lance un spaghetti de longueur d sur un sol carrelé, les carreaux étant des carrés de côté unité. Quelle est l'espérance de la distance, X_d, entre les centres des deux carreaux où se trouvent les extrémités du spaghetti?

Solution par Jacques Choné (Clermont-Ferrand)

Soit A l'extrémité gauche du spaghetti (on peut négliger le cas où il est vertical, cas de probabilité nulle) et C le carré contenant A (on peut négliger le cas où A est sur la frontière d'un carré, cas de probabilité nulle). On choisit comme origine le centre de C. On suppose que les variables aléatoires x, y, θ sont indépendantes et que x et y suivent la loi uniforme sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et θ la loi uniforme sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La seconde extrémité, B, du spaghetti a alors pour coordonnées $(x + d\cos\theta\,, y + d\sin\theta)$. On a, en désignant par $\mathrm{round}(\alpha)$ l'entier le plus proche de α :

$$X_d = \sqrt{(\mathrm{round}(x + d\cos\theta))^2 + (\mathrm{round}(y + d\sin\theta))^2}$$

$$E(X_d) = \frac{1}{\pi}\int_{x=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{y=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X_d\,d\theta\,dy\,dx\ .$$

Pour des raisons de symétrie (ou par des petits changements de variables appropriés) on a aussi:

$$E(X_d) = \frac{4}{\pi}\int_{x=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{y=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} X_d\,d\theta\,dy\,dx\ .$$

Il semble difficile d'en tirer une expression "simple" en fonction de d. Toutefois on peut calculer des approximations de $E(X_d)$, par exemple, par simulation de Monte-Carlo (penser aussi à la loi des grands nombres appliqués à

Problème n°95bis suite *(proposé par Christophe Terrier)*

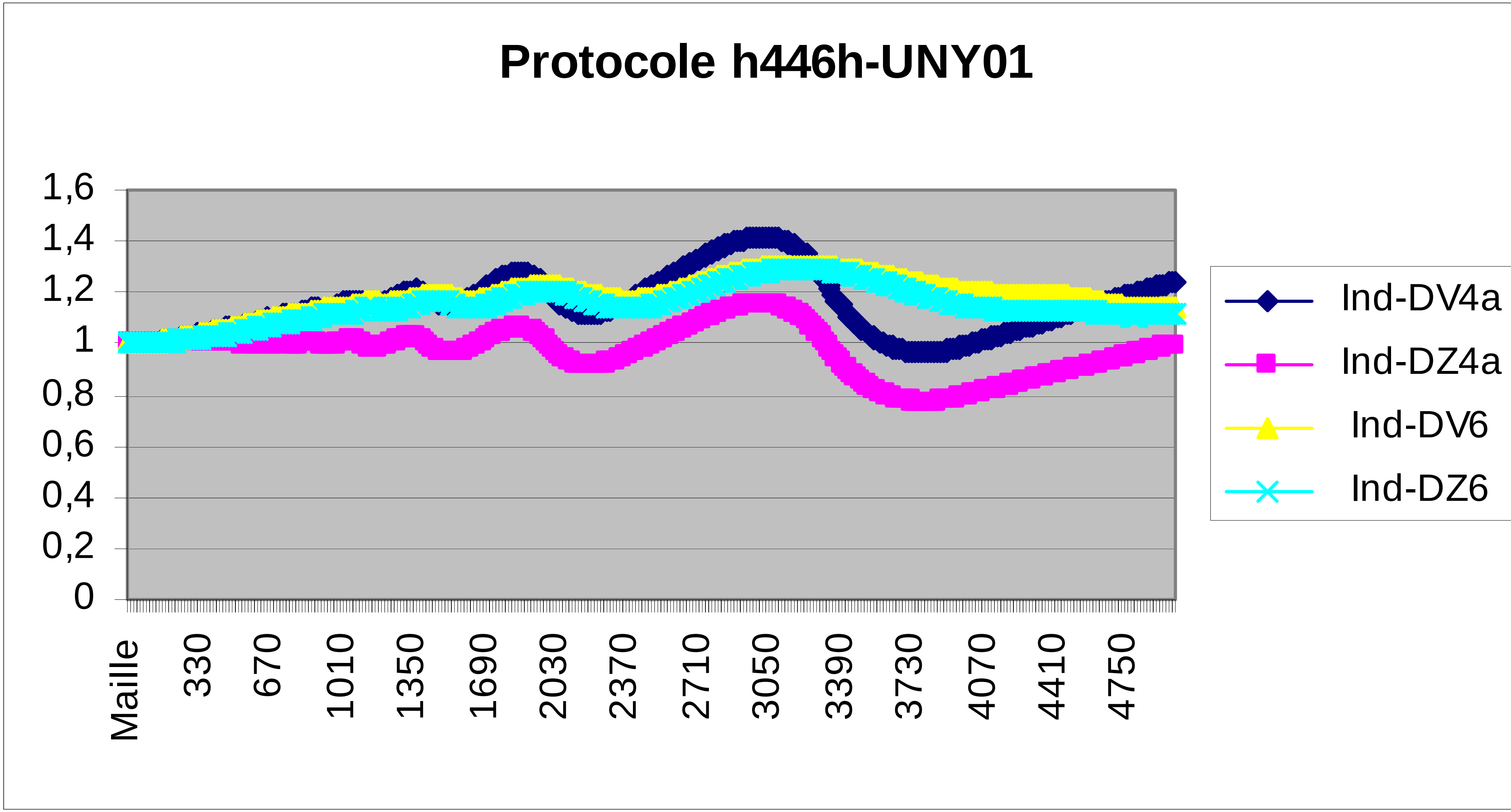
On veut étudier, suivant la valeur de la maille, m, $E(Z)$, avec $Z = \dfrac{X_{D,m}}{D}$ où

1. D, longueur du spaghetti (i.e. du déplacement), suit la loi uniforme sur $[a, b]$ avec $0 < a < b$;
2. $X_{D,m} = m\sqrt{\left(\text{round}\left(\dfrac{x + D\cos\theta}{m}\right)\right)^2 + \left(\text{round}\left(\dfrac{y + D\sin\theta}{m}\right)\right)^2}$ est la distance des centres des mailles de départ et d'arrivée du déplacement;
3. x et y suivent la loi uniforme sur $\left[-\dfrac{m}{2}, \dfrac{m}{2}\right]$ et θ suit la loi uniforme sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;
4. D , x , y , θ sont indépendantes.

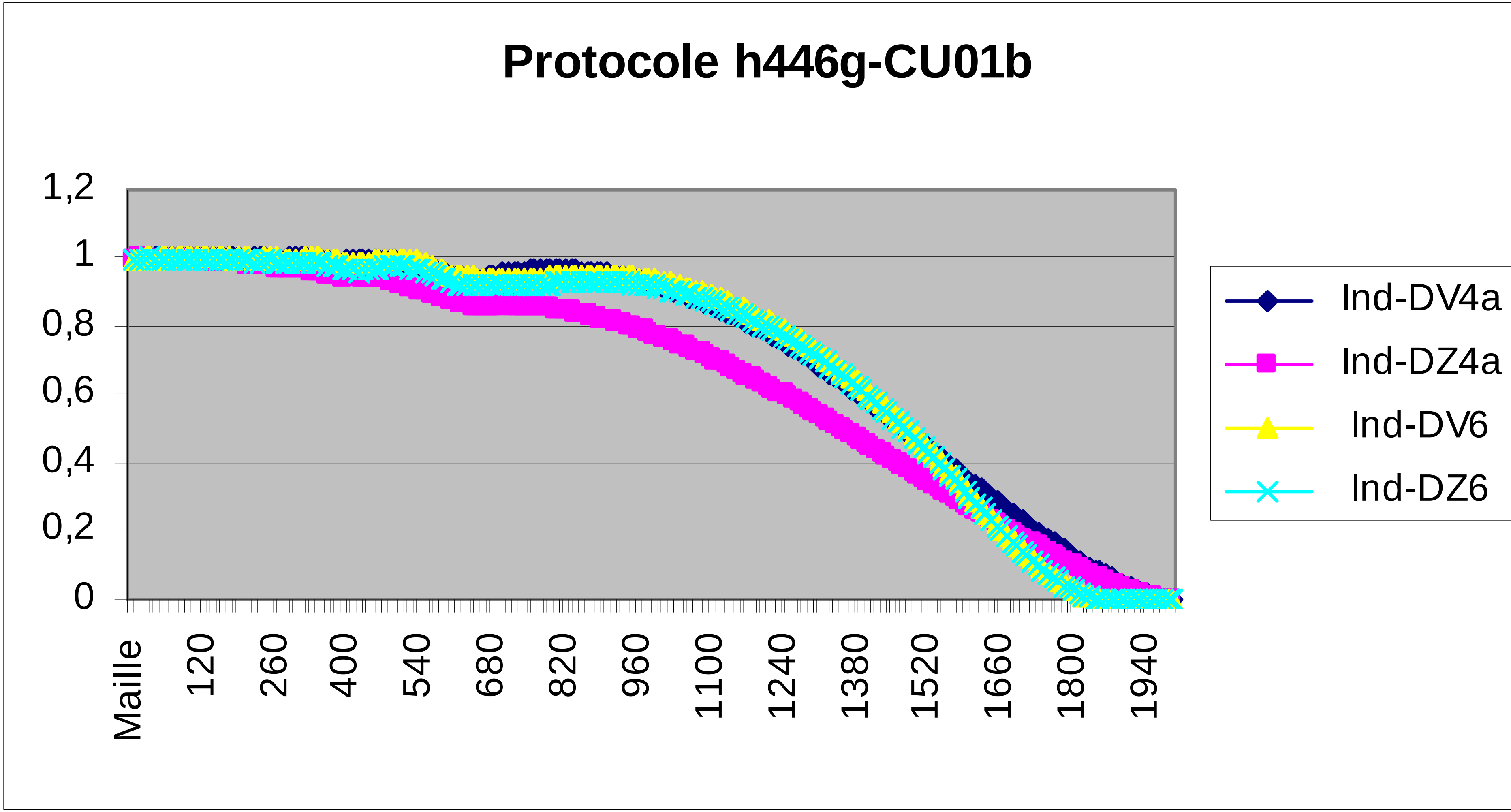
La fonction à étudier est donc la fonction:

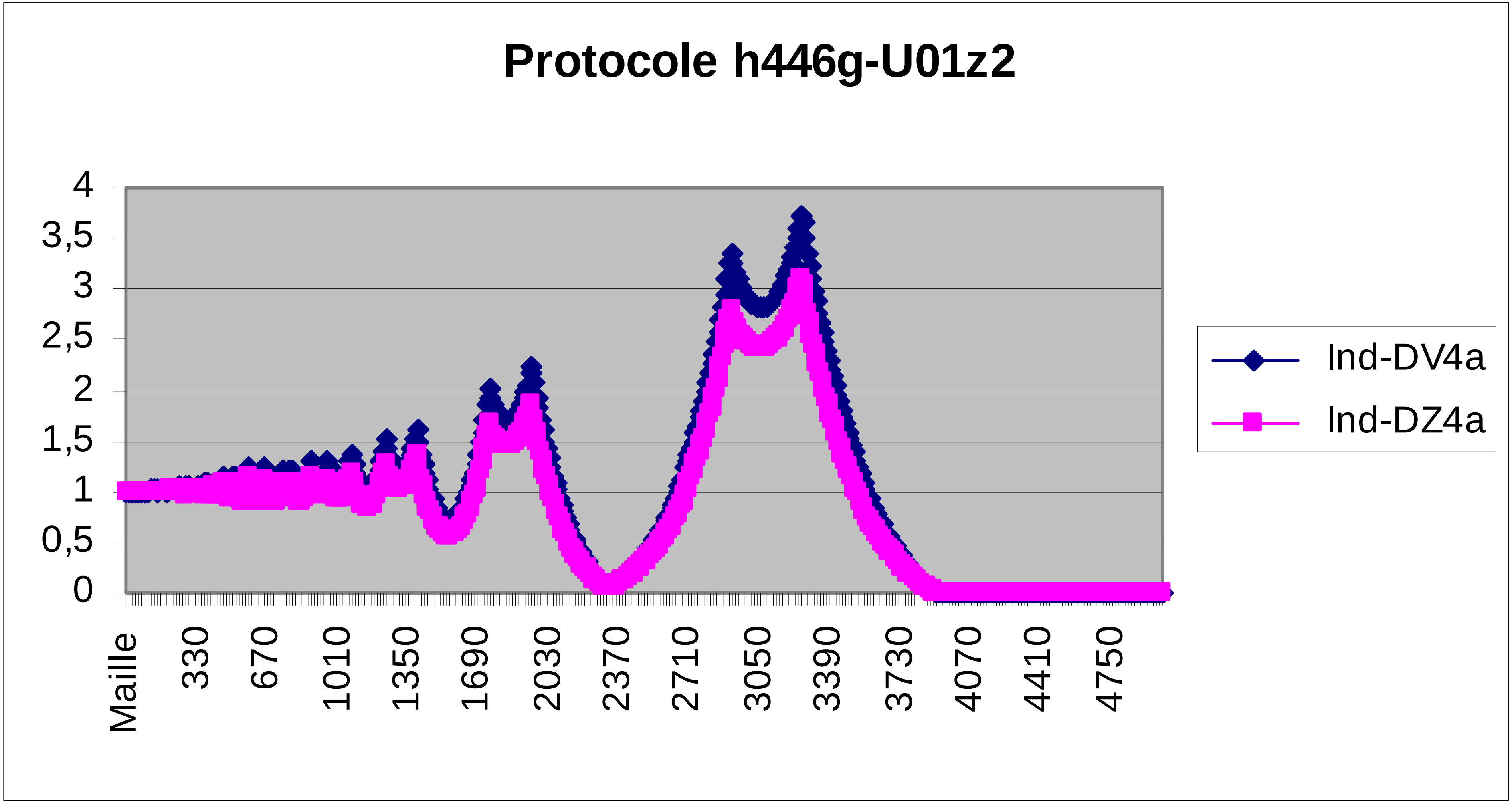
$$m \longmapsto E(Z) = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{m}\,\frac{1}{\pi}\int_{x=-m/2}^{x=m/2}\int_{y=-m/2}^{y=m/2}\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}\int_{D=a}^{D=b} \frac{X_{D,m}}{D}\, dD\, d\theta\, dy\, dx\ ,$$

où m prend ses valeurs dans un ensemble "‘raisonnable"’ par rapport à $[a, b]$.

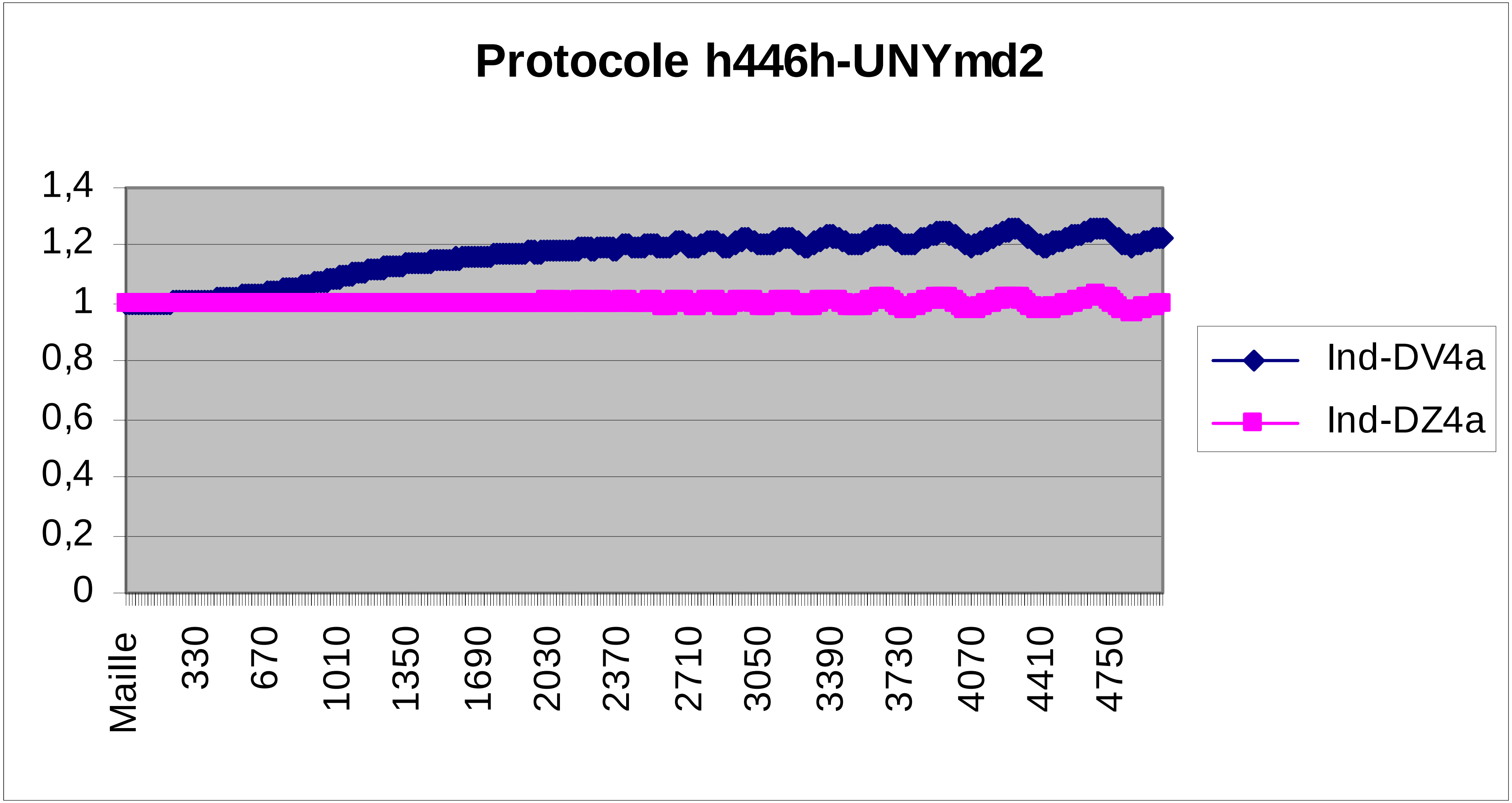


Protocole h446h-UNY01
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Maille
330
670
1010
1350
1690
2030
2370
2710
3050
3390
3730
4070
4410
4750
Ind-DV4a
Ind-DZ4a
Ind-DV6
Ind-DZ6

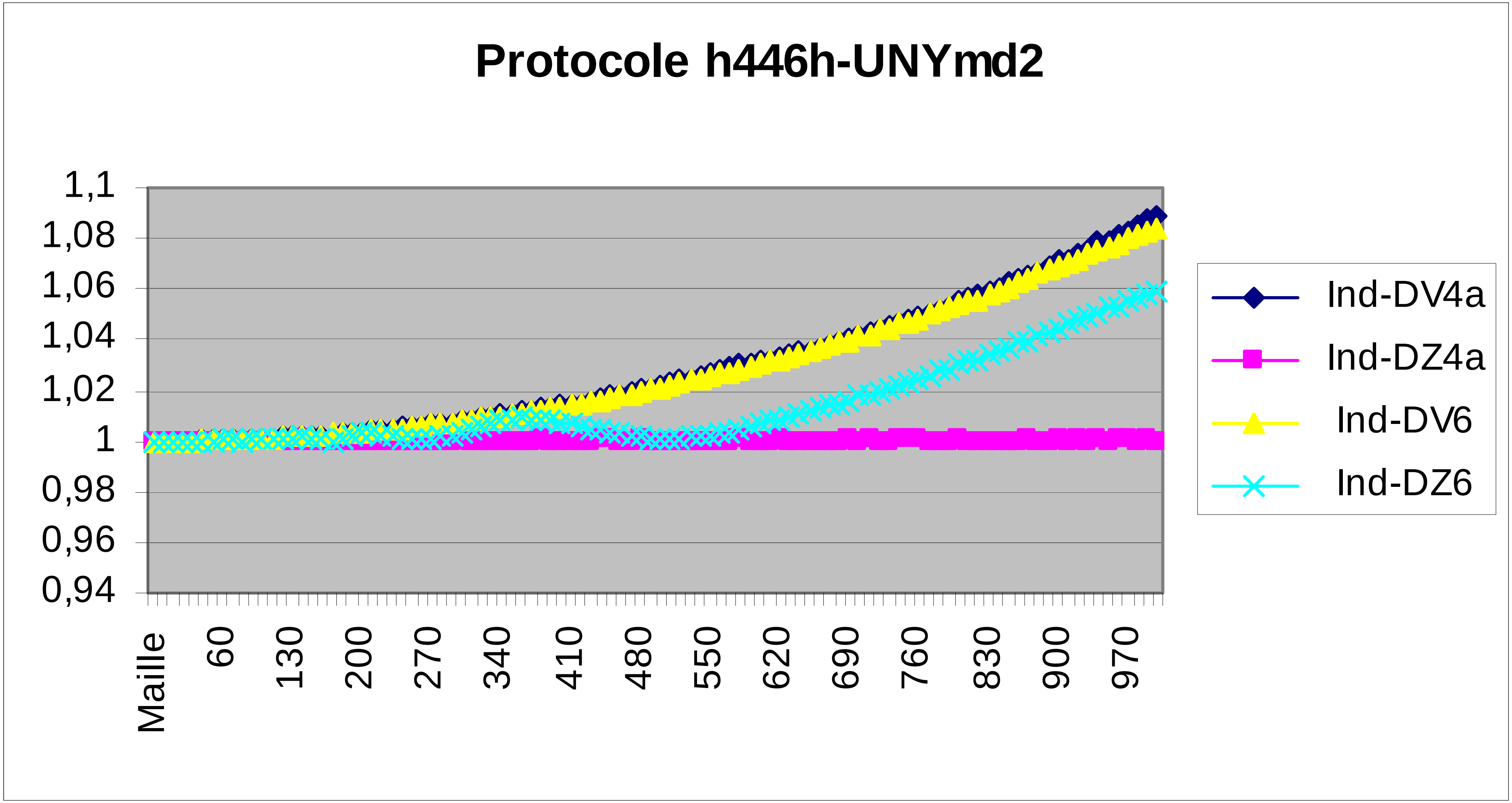

Protocole h446g-CU01b
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Maille
120
260
400
540
680
820
960
1100
1240
1380
1520
1660
1800
1940
Ind-DV4a
Ind-DZ4a
Ind-DV6
Ind-DZ6



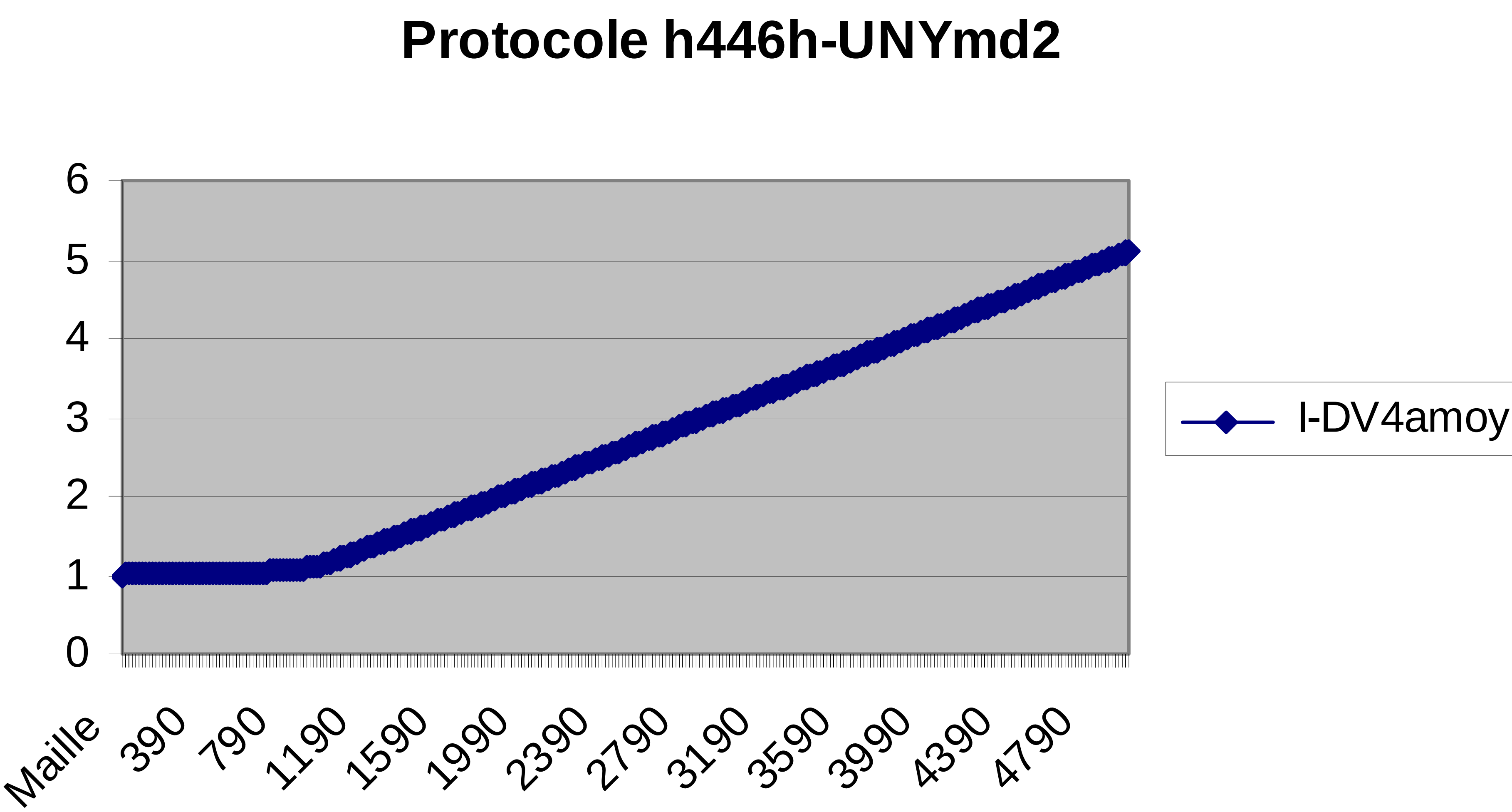
Protocole h446g-U01z2
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
Maille
330
670
1010
1350
1690
2030
2370
2710
3050
3390
3730
4070
4410
4750
Ind-DV4a
Ind-DZ4a



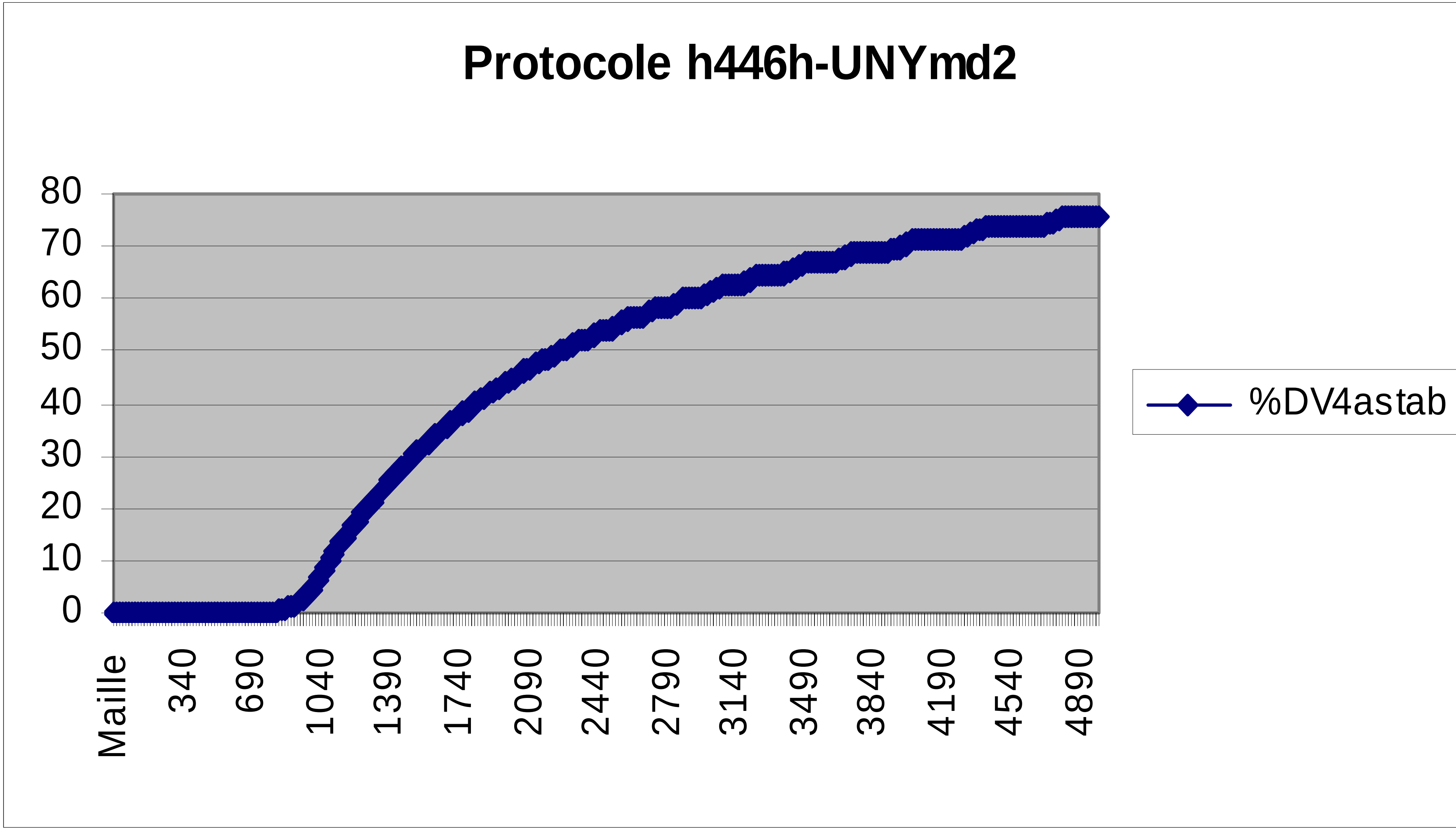
Protocole h446h-UNYmd2
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Maille
330
670
1010
1350
1690
2030
2370
2710
3050
3390
3730
4070
4410
4750
Ind-DV4a
Ind-DZ4a



Protocole h446h-UNYmd2
1,1
1,08
1,06
1,04
1,02
1
0,98
0,96
0,94
Maille
60
130
200
270
340
410
480
550
620
690
760
830
900
970
Ind-DV4a
Ind-DZ4a
Ind-DV6
Ind-DZ6



Protocole h446h-UNYmd2
6
5
4
3
2
1
0
Maille
390
790
1190
1590
1990
2390
2790
3190
3590
3990
4390
4790
I-DV4amoy


Protocole h446h-UNYmd2
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Maille
340
690
1040
1390
1740
2090
2440
2790
3140
3490
3840
4190
4540
4890
%DV4astab