Théorie des nombres index: les Nombres Index généralisés (g-IN)

Flavio VERRECCHIA

Università degli Studi di Milano Bicocca,
Università di Roma la "Sapienza", SESS network[•],

Introduction

L'objectif du travail est redéfinir, du point de vue de la notation, les traditionnelles formules de la théorie des nombres index, en présentant quelques nouveautés.

On retient fondamental une approche basée sur les valeurs, qui permet des mesures correctes des variations de prix et de la quantité des agrégats considérés. On reprend donc la définition de l'index de valeur totale en re-proposant l'index avec la méthode des facteurs.

On introduit ensuite les principaux facteurs de changement impliquant la révision des index et donc la définition des « generalised Index Numbers » (g-IN). En relation aux g-IN on défini: la « fonction indicatrice des co-présents », « l'indicateur de représentativité », et le nouveau facteur « Basket (B) » .
Dans le travail sont reprises: les formules traditionnelles (Annexe 5), à base fixe, de la théorie des nombres index et leur généralisation (Annexe 6) grâce à la définition de Nombres Index généralisés.

Pour finir, dans le texte (Annexe 7) on suppose un contexte de marchés financiers où est importante la présence systématique des « missing values » dans les bases de données.

La notation compliquée des formules en Tableau A.7.1 et A.7.2 est intéressante pour la création d'indices de sous-indices, où les ensembles peuvent être vu comme ensembles de sous-ensembles.

[•] *Università degli Studi di Milano Bicocca*[•]*, via Bicocca degli Arcimboldi, 8 – 20126 Milano: flavio.verrecchia@unimib.it.*
Università di Roma la "Sapienza", SESS network, Via del Castro Laurenziano,9 - 00161 Roma, flavio.verrecchia@uniroma1.it

1. Une approche basée sur les valeurs

L'évolution technologique a impliqué la disponibilité plus immédiate des informations, en rééquilibrant l'asymétrie historique et en garantissant la possibilité d'une position neutre basée sur les valeurs (et non plus centré sur les prix).

L'index central, synthèse des variations remarquables, est en conséquence l'index de valeur totale (Verrecchia 2004[13]).

On suppose la présence d'un marché, de deux périodes de relevé (0 et t) des biens, des prix, et des quantités traitées. La mesure de la variation de la valeur totale (V) de tous les agrégats considérés dépend de trois facteurs. Les deux premiers sont classiques:

- la mesure de la variation des prix (P);
- la mesure de la variation des quantités traitées (Q);

Un troisième facteur généralement non considéré inhérent aux variation non mesurable des index de prix et de quantité:
- la mesure de la variation du Basket (B).

Définition 1: *index de valeur totale (méthode des facteurs)*

Soit ${}_0P_t^{g\text{-}IN}$ un nombre index généralisé des prix et ${}_0Q_t^{g\text{-}IN}$ un nombre index généralisé des quantités axiomatiquement corrects[1], soit B_{0t} le facteur Basket. ${}_0V_t$, défini par la suivante expression factorielle

$$ {}_0V_t = {}_0P_t^{g\text{-}IN} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}IN} \cdot B_{0t} \tag{1} $$

est index de valeur totale entre 0 et t.

Sans l'identité exprimée par la Définition 1, il n'est pas garanti que les formules traditionnellement utilisées soient effectivement des mesures correctes des agrégats considérés. La satisfaction, de la part des formules traditionnelles, des propriétés axiomatiques non-renonçables, devient donc condition nécessaire mais pas suffisante. Elles servent en effet des précis hypothèses sur les données.

1.1. L'index de valeur totale et ses facteurs traditionnels

Les mesures de la variation des prix et des quantités prévues par la Définition 1 sont identiques aux définitions traditionnelles seulement pour $B_{0t} = 1$. Mais B_{0t} est égal à un seulement quand on n'enregistre aucune variations du panier. Variations qui ne sont pas seulement de type figurative: en effet même si un bien est nominalement présent mais traité sur le marché irrégulièrement, cela peut provoquer une variation du panier entre 0 et t. Cette situation est dans de nombreux marchés une chose courante, on pense par exemple aux marchés financiers. Les formules traditionnelles basées sur l'identité de l'index de valeur

$$ {}_0V_t = {}_0P_t^{IN} \cdot {}_0Q_t^{IN} \tag{2} $$

et sur le calcul indirect de l'index des quantités

$$ {}_0Q_t^{IN} = \frac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{IN}} \tag{3} $$

[1] Selon l'approche axiomatique (Martini, 2001) les propriétés non-renonçables d'un index sont Co, Ho, Mo, As (PrF est impliquée par As); celles de son co-facteur sont Ho, Mo, As (PrF est impliquée par As). Cependant selon l'approche systémique (Verrecchia, 2004[12]) les propriétés non-renonçables d'un index sont Co, Ho, Mo, Ag (PrF et As sont impliqués par Ag ou par AgI) ; celles de son co-facteur ils sont Ho, Mo, Ag (PrF et As elles sont impliquées par Ag ou par AgI). La propriété Co de l'index implique celle du co-facteur. Enfin on observe que d'autres propriétés sont impliquées par les précédentes, entre autres on rappelle: IdF, IdD, PrD, In, Di.

elles sont en conséquence généralement incorrectes et donc fausses les mesures dérivées.
Donc, comme exprimé par la Définition 1, l'index de valeur totale, qui, calculé directement avec la méthode des rapports de dépense suppose la forme suivante

$$_0V_t = \frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}} \tag{4}$$

il est factorisable en trois composantes distinctes caractérisant respectivement la contribution des prix, des quantités et du panier: mesures correctes exprimées par indices généralisés.

Évidemment l'index de valeur totale[2] peut être aussi exprimé à travers deux facteurs qui identifient le premier, ${}^{c}{}_0V_t$ (l'index de valeur des co-présents), les variations du sous-ensemble mesurable du panier le deuxième, B_{0t}, la dimension du sous-ensemble du panier en t non présent en 0 et vice- versa.

$$_0V_t = {}^{c}{}_0V_t \cdot B_{0t}$$

2. Les Nombres Index généralisés (g-IN)

Les index présentés par l'expression 1, sont des index particuliers, il s'agit en effet de nombres index généralisés. Ceux-ci sont nécessaires autant en l'absence d'hypothèses spécifiques sur les données, que pour la correcte mesure des variations des prix, des quantités et du panier. Ils sont en outre à la base de l'approche systémique qui s'intéresse, non aux index individuels, mais à la « collaboration » entre ceux-ci.

Dans l'introduction du chapitre XI (What is the best index number ?) de « The Making of index numbers » publié par Irving Fisher en 1922, on y peut lire « … *Let us assume, then, that we have accurate and complete data both as to price and quantities and, therefore, values. The specific question to be answered in this chapter is: What formula for the index number of, say, prices is the most accurate?* »

Pour construire son index idéal, Fisher, suppose d'avoir les données (celles des quantités) généralement non immédiatement disponibles. Au debout du siècle passé c'est le Laspeyres qui obtient la faveur du monde réel puisqu'au delà d'être sa compréhension plus aisée, il était, pour les variétés traditionnels, calculable.

Mais les hypothèses auxquels se réfère Fisher ne sont pas généralement considérés pour le calcul des nombres index.

Aujourd'hui, dans quelques cas le Laspeyres est encore l'unique choix possible à cause du retard informatif sur les quantités traitées. Dans d'autres cas, par contre, même en disposant immédiatement aussi bien des prix que des quantités traitées, il reste, malgré tout, trois problème :

- un premier lié aux panier et à ses variations dans le temps;
- un deuxième lié à la présence de « missing values » dans les données;
- un troisième lié au calendrier (e.g. système agrégatif; voir Verrecchia 2002, 2003, 2004[12]).

Dans le paragraphe, on introduit les g-IN et on défini: la « fonction indicatrice des co-présents », les « indicateurs de représentativité », et le nouveau facteur « Basket » .

---

[2] Naturellement $_0V_t = {}^{c}{}_0V_t$ si et seulement si $B_{0t} = 1$

2.1. La fonction indicatrice des co-présents

Les variations des prix et des quantités relatives traitées entre 0 et t sont mesurables et synthétisable par un nombre index si et seulement si sont disponibles toutes les informations relatives aux biens considérés. Cet hypothèse, d'un point de vue empirique, est souvent fausse. La généralisation des formules traditionnelles prévoit l'emploi de la fonction indicatrice des co-présents qui permet de mettre en évidence le seul sous-ensemble mesurable.

Définition 2: *fonction indicatrice des co-présents*

Soient les $v_{00,z}$ (avec z = 1,2,…,Z) les Z valeurs des biens du panier en 0. Une application non négative

$$I_{[0],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } v_{00,z} > 0 \\ 0 \text{ pour } v_{00,z} = 0 \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z) \tag{5}$$

est dite fonction indicatrice en 0 du $z^{\text{-ième}}$ bien.

Soient les $v_{tt,z}$ (avec z = 1,2,…,Z) les Z valeurs des biens du panier en t. Une application non négative

$$I_{[t],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } v_{tt,z} > 0 \\ 0 \text{ pour } v_{tt,z} = 0 \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z) \tag{6}$$

est dite fonction indicatrice en t du $z^{\text{-ième}}$ bien.

On définit le produit des fonctions indicatrices en 0 et en t du $z^{\text{-ième}}$ bien

$$^{c}I_{[0\cap t],z} = I_{[0],z} \cdot I_{[t],z} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z) \tag{7}$$

fonction indicatrice des co-présents en 0 et t.

2.2. Les Nombres Index généralisés

Le nouveau fondement qui remplace la centralité des prix avec celle des valeurs, se base sur la généralisation des formules traditionnelles à base fixe. Les nombres index généralisés sont construits pour être valides indépendamment soit des variations du panier que de la présence de « missing value » (i.e. ainsi que la structure des poids prévoie comme facteur la fonction indicatrice des co-présents).

Définition 3: *Nombre Index généralisé (g-IN)*

Soit F un nombre index des prix ou des quantités, soit f_z le $z^{\text{-ième}}$ prix ou quantité, soit $^{c}I_{[0\cap t],z}$ la $z^{\text{-ième}}$ fonction indicatrice des co-présents, soit γ_z le $z^{\text{-ième}}$ poids. Un nombre index (i.e. satisfaisant les propriétés axiomatiques; voir note 1) caractéristique, définissable par la suivante expression (par exemple avec la forme de MR)

$$_{0}F_{t\,\mathrm{MR}}^{\,g\text{-}IN} = \sum_{z=1}^{Z} \frac{f_{t,z}}{f_{0,z}} \left(\frac{\gamma_z \, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} \gamma_z \, {}^{c}I_{[0\cap t],z}} \right) \tag{8}$$

est dit nombre index généralisé (par la suite défini comme g-index).

Par exemple, l'index de g-Laspeyres[3] des prix (${}_0P_t^{g\text{-}L}$) à base fixe, d'un panier de biens, de la période comparée (t) par rapport à la période de base (0), dans la forme MR peut s'écrire comme

$$\underset{MR}{{}_0P_t^{g\text{-}L}} = \sum_{z=1}^{Z} \frac{p_{t,z}}{p_{0,z}} \left(\frac{p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}} \right)$$

2.3. L'indice de valeur des co-présents

L'index de valeur des co-présents (${}^{c}{}_0V_t$), ou bien le rapport de la dépense relative aux co-présents de la période comparée (t) par rapport à la période de base (0), peut être défini comme de suite:

Définition 4: *Indice de valeur des co-présents*

Soit p_z le z-ième prix, soit q_z la z-ième quantité, soit ${}^{c}I_{[0\cap t],z}$ la z-ième fonction indicatrice des co-présents. Le rapport de dépense relative aux co-présents de la période comparée (t) par rapport à la période de base (0), définissable par l'expression suivante

$${}^{c}{}_0V_t = \frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}} \qquad (9)$$

est dite index de valeur des co-présents (formule directe), et vaut l'identité suivante (méthode des facteurs)

$${}^{c}{}_0V_t = {}_0P_t^{g\text{-}IN} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}IN} \qquad (10)$$

2.4. Les indicateurs de représentativités des Nombres Index généralisés

De la même manière qu'une mesure n'a aucune signification si elle n'est pas référable à l'ensemble mesuré, un nombre index pourrait ne pas être représentatif du panier total. La connaissance de la quote-part mesurée, du panier considéré, résulte par conséquence nécessaire. Les indicateurs de représentativités, déjà introduits par Martini (1992) pour la situation t, sont ici défini en 0 et en t.

Définition 5: *Indicateur de représentativité*

Soit ${}^{c}V_{00}$ la somme pour z des r<Z valeurs en 0 (où z =1,2...,r...,Z) co-présents en 0 et t, soit V_{00} la somme des Z valeurs en 0. L'application non négative

$$R_0 = {}^{c}V_{00} \cdot (V_{00})^{-1} \qquad (11)$$

est dite indicateur de représentativité en 0.

[3] Naturellement ${}_0P_t^{L} = {}_0P_t^{g\text{-}L}$ si et seulement si ${}^{c}\boldsymbol{I}_{[0\cap t],z} = 1$ pour $\forall$ z (z=1,2,…,Z). En effet:

$$\sum_{z=1}^{Z} \frac{p_{t,z}}{p_{0,z}} \left(\frac{p_{0,z}\, q_{0,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}} \right) = \sum_{z=1}^{Z} \frac{p_{t,z}}{p_{0,z}} \left(\frac{p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}} \right) \Leftrightarrow {}^{c}\boldsymbol{I}_{[0\cap t],z} = 1 \text{ pour } \forall\ z \in Z$$

Soit ${}^{c}V_{tt}$ la somme des r<Z valeurs en t co-présents en 0 et t, soit V_{tt} la somme des Z valeurs en t. L'application non négative

$$R_t = {}^{c}V_{tt} \cdot (V_{tt})^{-1} \tag{12}$$

est dite indicateur de représentativité en t.

2.5. Le facteur Basket

Le facteur Basket est la synthèse de trois éléments distincts qui influencent son ampleur effective:

- la variation effective du panier (e.g. nouveaux biens dans le panier);
- la présence de « missing value » (e.g. non mesurabilité des prix ou quantité d'un sous-ensemble de l'agrégat considéré);
- le calendrier. Par exemple si on considère les systèmes agrégatifs de nombres index (Verrecchia 2002, 2003, 2004[12]) la fermeture du $s^{\text{ième}}$ marché (e.g. fermeture d'un marché par exemple sectoriel pour une fête locale) rend possible les mesures des variations (de prix, de quantités et de valeur) de l'ensemble de biens des s - 1 marchés restant.

Définition 6: *Le facteur Basket (B)*

Soit R_0 l'indicateur de représentativité en 0, soit R_t l'indicateur de représentativité en t. L'application non négative

$$B_{0t} = R_0 \cdot (R_t)^{-1} \tag{13}$$

est dite *facteur « Basket »*.

Il résulte évidemment que, R_0 synthétise l'effet des « missing value » et du « calendrier », et R_t l'effet de la variation du panier en t respect à 0. Donc B_{0t} peut être défini comme la contribution due a trois distinctes composantes (panier: ${}^{pa}B_{0t}$, Calendrier: ${}^{ca}B_{0t}$, missing value: ${}^{mv}B_{0t}$)

$$B_{0t} = ({}^{mv}B_{0t} + {}^{ca}B_{0t} - 1) \cdot {}^{pa}B_{0t}$$

Les trois composantes du Basket Factor peuvent être écrites comme de suite

$${}^{pa}B_{0t} = (R_t)^{-1} = ({}^{c}V_{tt})^{-1} \cdot V_{tt}$$

$${}^{ca}B_{0t} = {}^{ca}R_0 = 1 - [{}^{ca}V_{00} \cdot (V_{00})^{-1}] \qquad (\text{où } {}^{ca}V_{00} = \textstyle\sum_z \; p_{0,z}q_{0,z} \cdot {}^{ca}I_{[t],z})$$

$${}^{mv}B_{0t} = {}^{mv}R_0 = 1 - [{}^{mv}V_{00} \cdot (V_{00})^{-1}] \qquad (\text{où } {}^{mv}V_{00} = V_{00} - {}^{c}V_{00} - {}^{ca}V_{00})$$

3. Conclusion

La notation introduite, synthétisée par la définition 3, n'est pas seulement préliminaire aux applications, elle a aussi une fonction d'encadrement théorique de base nécessaire aux phases suivantes de recherche. Il reste, en effet, ouvertes des questions importantes comme la définition multi-temporelle des index généralisés, l'étude du trade-off entre la représentativité et mesures correctes des agrégats considérés, les applications des index généralisés en systèmes agrégatifs, etc.

On observe, en outre, que la nouvelle notation introduite, est naturellement valide même en domaine axiomatique (Annexe 3 et 4) et nécessaire pour l'approche systémique (Verrecchia, 2004[12]). Il devrait se fermer, grâce à la nouvelle notation introduite, le parcours théorique qui a duré plus d'un siècle, dans lequel ont participé entre les autres les deux économistes allemands: Étienne Laspeyres (1834-1913) et Hermann Paasche (1851-1925), l'économiste américain Irving

Fisher (1867-1947) et le statisticien-économiste italien Marco Martini (1944-2002), école dont je suis issu. En effet, comme on peut observer dans la Définition 3 et dans l'Annexe 6, grâce à la généralisation des index, i.e. sans la nécessité d'hypothèses préalables sur les données, on peut exprimer l'index de valeur totale comme le résultat de la contribution des variations des prix, des relatifs quantité traités, vendus ou produits, et des variations liées aux panier.

L'index de valeur totale devient « central », grâce à l'identité exprimée par son calcul factoriel (Définition 1), pour la Définition correcte des mesures (g-IN) des prix, des quantités et du panier.

Normalement, on calcule un index des prix pendant que celui des quantités est calculé indirectement (Expression 3). On observe que cette habitude porterait à des index déformés même lorsque l'on considère les seuls biens comparables (e.g. en 0 ou en t). La comparabilité de l'index des prix, en effet, serait relative à 0 ou bien à t, alors que l'index de la quantité calculé indirectement serait par définition le deuxième facteur de l'index de valeur. Les index, donc, même dans ce cas mesureraient en partie les réelles variations des prix et des quantités et en partie les variations du panier.

Donc, comme déjà observé, ce qui arrive souvent est que B_{0t} est en partie présent dans l'index de prix et en partie dans celui des quantités, en contribuant à fournir des mesures déformées des agrégats considérés. En Annexe 6 figurent les formules correctes pour le calcul indirect des index des prix et des quantités (Laspeyres, Paasche, Fisher), du facteur Basket, de l'index de valeur totale et de l'index de valeur des co-présents.

L'auteur remercie Christine Marc, Creuso Nadia, Lesnard Laurent et son père Verrecchia Aldo pour leurs conseils sur le français et Ignaccolo Rosaria pour la lecture et les conseils d'une première version de l'annexe 4.

Annexe 1

Abréviations et symboles

g-IN(*f*)	Nombre Index généralisé
IN(*f*)	Nombre Index
NIS	Système de nombres index
Cof(*f*)	co-facteur de *f*
AnB(*f*)	Antithèse de la base de *f*
AnF(*f*)	l'antithèse Factorielle de *f*
ABF(*f*)	Antithèse de la base de l'antithèse Factorielle de *f*
Cro(*f*)	Crossing di *f*
Co	Commensurabilité
Ho	Homogénéité
Mo	Monotonicité
As	Associativité
Ag	Agrégativité
Di	Dimensionnalité
In	Intèrnalité
PrF	Proportionnalité Forte
PrD	Proportionnalité Faible
IdF	Identité Forte
IdD	Identité Faible
MR	Moyenne de Rapports
RS	Rapport de Dépense
RM	Rapport de Moyennes
${}_0V_t$	index de valeur totale (période comparée t, base 0)
${}_0P_t$	nombre index des prix (période comparée t, base 0)
${}_0Q_t$	nombre index des quantités (période comparée t, base 0)
${}^c{}_0V_t$	index de valeur des co-présents (période comparée t, base 0)
${}_0P_t^{g\text{-}IN}$	nombre index généralisé des prix (période comparée t, base 0)
${}_0Q_t^{g\text{-}IN}$	nombre index généralisé des quantités (période comparée t, base 0)
B_{0t}	facteur Basket (période comparée t, base 0)
Ω	espace fondamental
F	σ-algèbre
#	mesure comptateur
(Ω,F)	espace mesurable
$\Re^+$	réels positifs
$\in$	appartient
$\forall$	chaque
$\cap$	intersection
$\cup$	union
I	fonction indicatrice
[a,b]	intervalle a,b inclue
[a,b)	intervalle a inclue, b exclue

Annexe 2

L'approche « Making »

L'approche fisherienne se base sur la construction des index et sur la vérification *ex post* des propriétés satisfaites par les fonctions considérées.

Ensuite le point de vue sera en général référé à des index ayant pour base la situation temporelle 0 (avec t = 0,1....,T).

Selon l'approche d'Irving Fisher, un index générique, ${}_{\beta}\underset{\phi}{F}{}_{\alpha,\gamma}$, pour être défini nécessite le choix préliminaire:

- de la formule (ϕ) utilisée pour la construction de l'index[4]:
  - rapport de dépense (RS) ;
  - rapport de moyennes (RM) ;
  - moyenne de rapports (MR).

- du type d'index (F), selon l'attention à la variation des prix ou des quantités:
  - des prix (P) ;
  - des quantités (Q);

- de la situation de base (β) pour $\forall\ \beta \in T$;

- de la situation comparée (α) pour $\forall\ \alpha \in T$;

- des poids utilisés (γ), qui peuvent être égaux[5] à ceux de α ou β ou bien différent.

---

[4] Les trois formules de Fisher: On suppose d'avoir les prix et les quantités traitées de tous les biens aussi bien en t qu'en 0. l'index de Laspeyres des prix (${}_0P_t^L$) à base fixe, des paniers de biens de la période base (0) et de la période comparée (t), peut être écrit, comme Moyenne de Rapports (voir Tableau A.5.1), comme Rapport de Dépense (voir Tableau A.5.1) et comme Rapport de Moyennes

$$\underset{RM}{{}_0P_t^L} = \frac{\frac{1}{Z}\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}}{\frac{1}{Z}\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}}$$

il vaut, donc, la suivante identité

$$\underset{RS}{{}_0P_t^L} = \underset{RM}{{}_0P_t^L} = \underset{MR}{{}_0P_t^L}$$

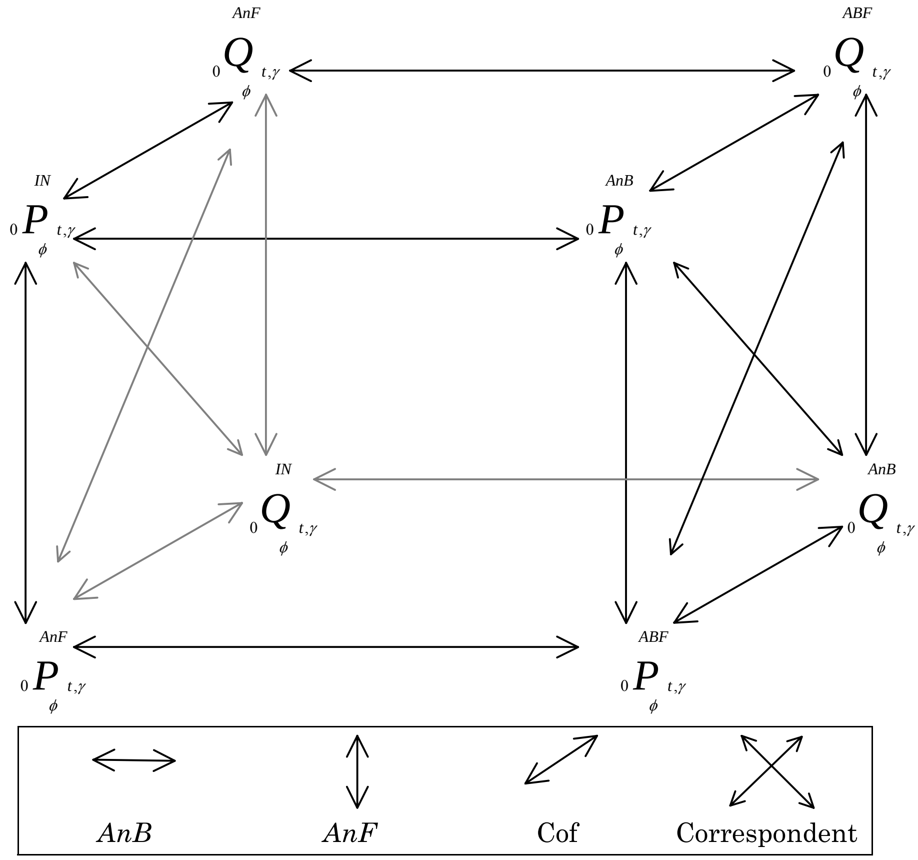
[5] Exemples de poids pour ϕ égal à RS, RM ou MR:
- de la situation 0: $q_{0,z}$ avec F=P, $p_{0,z}$ avec F=Q ;
- de la situation t: $q_{t,z}$ avec F=P, $p_{t,z}$ avec F=Q ;
- moyenne géométrique simple: $(q_{t,z}\, q_{0,z})^{1/2}$ avec F=P, $(p_{t,z}\, p_{0,z})^{1/2}$ avec F=Q;
- moyenne arithmétique simple : $(q_{t,z} + q_{0,z})/2$ avec F=P, $(p_{t,z} + p_{0,z})/2$ avec F=Q;
- moyenne harmonique simple : $2/(1/q_{t,z} + 1/q_{0,z})$ avec F=P, $2/(1/p_{t,z} + 1/p_{0,z})$ avec F=Q;

Exemples de poids pour ϕ égal à RM ou MR:
- à prix et à quantité de la situation 0: $w_{00,z} = (p_{0,z}\, q_{0,z})/V_{00}$;
- à prix et à quantité de la situation t: $w_{tt,z} = (p_{t,z}\, q_{t,z})/V_{tt}$;
- à prix de la situation t et quantité de la situation 0: $w_{t0,z} = (p_{t,z}\, q_{0,z})/V_{t0}$;
- à prix de la situation 0 et quantité de la situation t: $w_{0t,z} = (p_{0,z}\, q_{t,z})/V_{0t}$;
- moyenne géométrique simple des valeurs relatives: $(w_{tt,z}\ w_{00,z})^{1/2}$;
- moyenne arithmétique simple des valeurs relatives : $(w_{tt,z} + w_{00,z})/2$;
- moyenne harmonique simple des valeurs relatives : $2\,((w_{tt,z})^{-1} + (w_{00,z})^{-1})^{-1}$;

Les opérateurs du Fisher

En Figure A.2.1 on peut observer les quatre versions primaire du Fisher et les co-facteur relatives.

Figure A.2.1: *Les versions primaires du Fisher*



Source: représentation graphique, Martini 2001

A chaque fonction pour Fisher correspond un co-facteur (Cof) (**Opérateur A.2.1**) :

$$Cof\left[{}_{0}\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}\right] = \frac{{}_{0}V_{t}}{{}_{0}\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}} = {}_{0}\underset{\phi}{Q}{}^{AnF}_{t,\gamma} \quad ;$$

$$Cof\left[{}_{0}\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}\right] = \frac{{}_{0}V_{t}}{{}_{0}\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}} = {}_{0}\underset{\phi}{P}{}^{AnF}_{t,\gamma}$$

d'un index des prix ou des quantités trois fonctions « primaires » suivent:

- ***Opérateur A.2.2:*** *Antithèse de la base (AnB)*

$$AnB\left[{}_{0}\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}\right] = \left({}_{t}\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{0,\gamma}\right)^{-1} = {}_{0}\underset{\phi}{P}{}^{AnB}_{t,\gamma} \,;$$

$$AnB\left[{}_{0}\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}\right] = \left({}_{t}\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{0,\gamma}\right)^{-1} = {}_{0}\underset{\phi}{Q}{}^{AnB}_{t,\gamma}$$

- ***Opérateur A.2.3:*** *Antithèse Factorielle (AnF)*

$$AnF\left[{}_{0}\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}\right] = \frac{{}_0V_t}{{}_{0}\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}} = {}_{0}\underset{\phi}{\overset{AnF}{P}}{}_{t,\gamma} \quad ;$$

$$AnF\left[{}_{0}\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}\right] = \frac{{}_0V_t}{{}_{0}\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}} = {}_{0}\underset{\phi}{\overset{AnF}{Q}}{}_{t,\gamma}$$

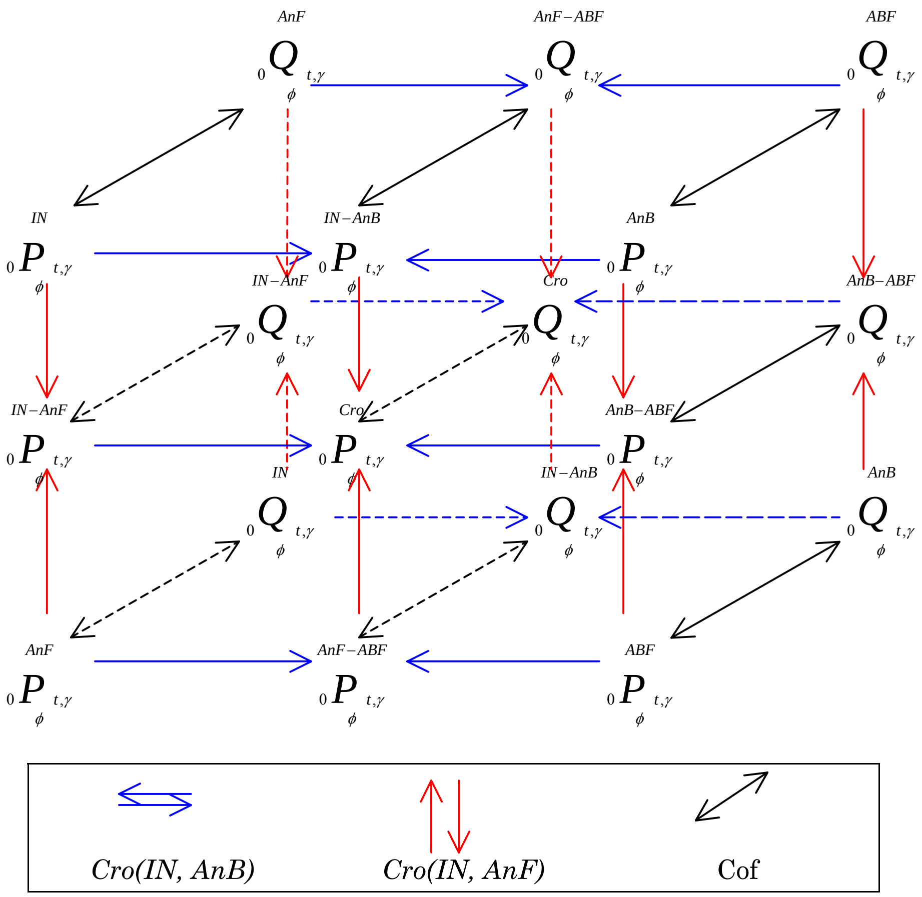
- **Opérateur A.2.4:** Antithèse de la base de l'Antithèse Factorielle (ABF)

$$ABF\left[{}_{0}\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}\right] = AnB\left[Anf\left[{}_{0}\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}\right]\right] = AnB\left[{}_{0}\underset{\phi}{\overset{AnF}{P}}{}_{t,\gamma}\right] = \left({}_{t}\underset{\phi}{\overset{AnF}{P}}{}_{0,\gamma}\right)^{-1} = {}_{0}\underset{\phi}{\overset{ABF}{P}}{}_{t,\gamma} \;;$$

$$ABF\left[{}_{0}\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}\right] = AnB\left[Anf\left[{}_{0}\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}\right]\right] = AnB\left[{}_{0}\underset{\phi}{\overset{AnF}{Q}}{}_{t,\gamma}\right] = \left({}_{t}\underset{\phi}{\overset{AnF}{Q}}{}_{0,\gamma}\right)^{-1} = {}_{0}\underset{\phi}{\overset{ABF}{Q}}{}_{t,\gamma}$$

D'un index des prix ou des quantités cinq fonctions « crossing » suivent. En Figure A.2.2 on peut observer les cinq versions crossing du Fisher.

Figure A.2.2: *Les versions crossing de chaque formule*



Source: représentation graphique, Martini 2001

- **Opérateur A.2.5**: Les cinq opérateurs crossing (Cro)
  - *Crossing (IN, AnB)*

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnB}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[2]{{}_0\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnB}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{P}{}^{IN-AnB}_{t,\gamma}\ ;$$

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnB}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[2]{{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnB}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{IN-AnB}_{t,\gamma}$$

  - *Crossing (IN, AnF)*

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnF}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[2]{{}_0\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnF}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{P}{}^{IN-AnF}_{t,\gamma}\ ;$$

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnF}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[2]{{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnF}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{IN-AnF}_{t,\gamma}$$

  - *Crossing (IN, ABF)*

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnF}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{ABF}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[2]{{}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnF}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{ABF}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnF-ABF}_{t,\gamma}\ ;$$

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnF}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{ABF}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[2]{{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnF}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{ABF}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnF-ABF}_{t,\gamma}$$

  - *Crossing (AnB, ABF)*

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnB}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{ABF}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[2]{{}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnB}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{ABF}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnB-ABF}_{t,\gamma}\ ;$$

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnB}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{ABF}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[2]{{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnB}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{ABF}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnB-ABF}_{t,\gamma}$$

  - *Crossing (IN, AnF,AnB, ABF)*

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnF}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnB}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{ABF}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[4]{{}_0\underset{\phi}{P}{}^{IN}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnF}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{AnB}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{P}{}^{ABF}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{P}{}^{Cro}_{t,\gamma}\ ;$$

$$Cro\left[{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnF}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnB}_{t,\gamma},\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{ABF}_{t,\gamma}\right] = \sqrt[4]{{}_0\underset{\phi}{Q}{}^{IN}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnF}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{AnB}_{t,\gamma}\ {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{ABF}_{t,\gamma}} = {}_0\underset{\phi}{Q}{}^{Cro}_{t,\gamma}$$

Annexe 3

L'approche « Axiomatique »

Les approches méthodologiques, dans la théorie des nombres index, se subdivisent en deux groupes fondamentaux: l'approche « Making » de Fisher et celui « axiomatique » d'Eichhorn et de Voeller (1976), repris par Vogt (1979), Martini (1992) et par Diewert (1992). L'approche axiomatique se posant aussi dans la tradition fisherienne en renverse le dessin: a partir de la vérification ex post des propriétés on arrive, comme dans d'autres disciplines, à la définition ex ante d'une fonction qui doit satisfaire des axiomes déterminés qui formalisent les principes fondamentaux de la théorie même.

Définition A.3.1 *axiomatique d'index composé d'Eichhorn et de Voeller*
Soit r<Z le # de biens directement comparables relevés en deux situations 0 et t (où z = 1,2....,r...,Z) co-présents en 0 et t, soient les vecteurs $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_t \in \Re^+$. La fonction

$$_0P_t = f_{4r}\,(\mathbf{p}_0,\, \mathbf{p}_t,\, \mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_t)$$

qui transforme en nombre $\in \Re^+$ les vecteurs des prix et des quantités et qui respecte les propriétés axiomatiques IdF, Co, Ho, Di, Mo est dite nombre index composé des prix. Une fonction

$$_0Q_t = f_{4r}\,(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_t,\, \mathbf{p}_0,\, \mathbf{p}_t)$$

qui transforme en nombre $\in \Re^+$ les vecteurs des prix et des quantités et qui respecte les propriétés axiomatiques IdF, Co, Ho, Di, Mo est dite nombre index composé des quantités.

Puisque le fait que l'index respecte les propriétés axiomatiques ne comporte nécessairement pas le respect des mêmes de la part du co-facteur, Martini introduit une définition plus rétrécissant de nombre index (avec quelques restrictions aussi *axiomatique*):

Définition A.3.2 *axiomatique d'index composé de Martini*
Soit r<Z le # de biens directement comparables relevés en deux situations 0 et t (où z = 1,2....,r...,Z) co-présents en 0 et t, soient les vecteurs $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_t \in \Re^+$. La fonction

$$_0P_t = f_{4r}\,(\mathbf{p}_0,\, \mathbf{p}_t,\, \mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_t)$$

qui transforme, les vecteurs de prix et de quantités, en nombre $\in \Re^+$ est dite nombre index composé de prix si l'index respecte les propriétés axiomatiques Co, PrF, Mo, Ho, As. Et si le co-facteur est une fonction

$$_0\underline{Q}_t = f_{4r}\,(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_t,\, \mathbf{p}_t,\, \mathbf{p}_0)$$

qui transforme, les vecteurs de prix et de quantités, en nombre $\in \Re^+$ et qui respecte les mêmes propriétés axiomatiques Co, PrF, Mo, Ho, As.
La fonction

$$_0Q_t = f_{4r}\,(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_t,\, \mathbf{p}_0,\, \mathbf{p}_t)$$

qui transforme, les vecteurs de prix et de quantités, en nombre $\in \Re^+$ est dite nombre index composé de quantités si l'index respecte les propriétés axiomatiques Co, PrF, Mo, Ho, As. Et si le co-facteur est une fonction

$$_0\underline{P}_t = f_{4r}\,(\mathbf{p}_0,\, \mathbf{p}_t,\, \mathbf{q}_t,\, \mathbf{q}_0)$$

qui transforme, les vecteurs de prix et des quantité, en nombre $\in \Re^+$ et qui respecte les mêmes propriétés axiomatiques Co, PrF, Mo, Ho, As (voir Martini 2001).

Annexe 4

Les Nombres Index généralisés (g-IN) et l'approche « systémique »

L'approche systémique ou coordonnée se fonde sur les fondements axiomatiques, en définissant ex-ante les propriétés qu'un nombre index doit satisfaire pour être définie comme tel (Verrecchia 2004[12]). Les nombres index de l'approche systémique (NIS) ne sont pas, cependant, isolés, mais font au contraire partie d'un système qui permet de valoriser et compléter l'information, (singulièrement contenue). Pour information, outre celle qui dérive de l'amélioration des mesures (g-IN) et celle liée à la batterie d'index du NIS, on entend aussi celle générée par l'approche coordonnée et collaborative des index. Par exemple, l'index de Fisher qui n'est pas agrégatif si on considère seulement les sous-index de Fisher peut être tel si il est considéré dans une optique systémique.

Î **Définition A.4.1** *Agrégativité indirect (AgI) selon l'approche systémique*
Les nombres index construits comme Crossing de nombres index agrégatifs, dans le domaine de l'approche systémique, sont eux même nombres index agrégatifs (indirectement). Î

Î **Définition** ***A.4.2*** *Nombre index généralisé composé selon l'approche systémique de Verrecchia*
Soit (Ω,F) un espace mesurable, Ω un ensemble appelé espace échantillon, F une *σ-algebra* sur Ω, $\wp$ *une mesure de probabilité* sur (Ω,F). Soit Z le # des biens relevés en deux situations 0 et t (avec $z = 1,2,\ldots,r,\ldots,Z$). Soit $(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]})$ un vecteur aléatoire définit sur $(\Omega,F,\wp)$ a valeur on $\Re^{+4Z}\times\{0,1\}$ (avec $\Re^{+4Z}=((\Re^+)^Z)^4$), soient les vecteurs de prix $\boldsymbol{P}_.$ et de quantité $\boldsymbol{Q}_. \in \Re^{+Z}$ (au temps 0 et t) et ${}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]}$ la fonction indicatrice des co-présents dans les deux situations (0 et t). Soient $\mathbf{p}_.$, $\mathbf{q}_.$ et ${}^c\mathbf{i}_{[0\cap t]}$ les déterminations des variables aléatoire $\boldsymbol{P}_.$, $\boldsymbol{Q}_.$ et ${}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]}$.
Une application mesurable non négative définie sur F

$$f\,(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]}):\ F \to [0,\infty)$$

qui transforme les v.a. de prix et de quantités en nombre $\in \Re^+$ est dite nombre index généralisé sur (Ω,F) si elle satisfait les propriétés suivantes:

i) $f\,(p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}) \in \mathrm{Co}$
ii) $f\,(p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}) \in \mathrm{Ho}$
iii) $f\,(p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}) \in \mathrm{Mo}$
iv) $f\,(p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}) \in \mathrm{Ag}$ (ou AgI)

et si son co-facteur est une application mesurable non négative définie sur F

$$Cof\,[\,f\,(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]})] : F \to [0,\infty)$$

qui transforme les v.a. de prix et de quantités en nombre $\in \Re^+$ et qui satisfait les propriétés suivantes:

v) $Cof\,[f(p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]})] \in \mathrm{Ho}$
vi) $Cof\,[f(p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]})] \in \mathrm{Mo}$
vii) $Cof\,[f(p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]})] \in \mathrm{Ag}$ (ou AgI). Î

Dans le domaine de l'approche systémique Ag (ou AgI) est considéré comme une propriété[6] irrenonçable puisque cette propriété est essentielle pour l'agrégation d'index relatifs à des ensembles différents.
Evidement si $f\,(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]})$ est un g-IN sur (Ω,F) de conséquence aussi $Cof\,[\,f\,(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]})]$ est un g-IN sur (Ω,F), et vice versa, pour la dualité exprimé par l'expression 10.

---

[6] Faisent suite à la définition systémique de nombre index généralisé ils suivent d'autre propriétés. Pour l'Index:

i) $f\in\mathrm{Ag} \Rightarrow f\in\mathrm{As} \Rightarrow f\in\mathrm{PrF}$
ii) $f\in\mathrm{AgI} \Rightarrow f\in\mathrm{As} \Rightarrow f\in\mathrm{PrF}$

et pour le co-facteur de l'index:

iii) $cof(f)\in\mathrm{Ag} \Rightarrow \mathrm{cof}(f)\in \mathrm{As} \Rightarrow \mathrm{cof}(f)\in\mathrm{PrF}$
iv) $cof(f)\in\mathrm{AgI} \Rightarrow \mathrm{cof}(f)\in \mathrm{As} \Rightarrow \mathrm{cof}(f)\in\mathrm{PrF}$

Annexe 5

Les formules traditionnelles (Laspeyres, Paasche, Fisher), directes et indirectes, de la théorie des nombres index

Tableau A.5.1: *Calcul direct des IN comme Rapports de Dépense et Moyenne de Rapports*

Nombres index des prix	Nombres index des quantités	Index de valeur totale
Rapports de Dépense		$${}_0V_t = \frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}}$$
$$\underset{RS}{{}_0P_t^{L}} = \frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}}$$	$$\underset{RS}{{}_0Q_t^{P}} = \frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}}$$	
$$\underset{RS}{{}_0P_t^{P}} = \frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{t,z}}$$	$$\underset{RS}{{}_0Q_t^{L}} = \frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{t,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}}$$	
Moyenne de Rapports		
$$\underset{MR}{{}_0P_t^{L}} = \sum_{z=1}^{Z} \frac{p_{t,z}}{p_{0,z}} \left(\frac{p_{0,z}\, q_{0,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}} \right)$$	$$\underset{MR}{{}_0Q_t^{P}} = \sum_{z=1}^{Z} \frac{q_{t,z}}{q_{0,z}} \left(\frac{p_{t,z}\, q_{0,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}} \right)$$	
$$\underset{MR}{{}_0P_t^{P}} = \sum_{z=1}^{Z} \frac{p_{t,z}}{p_{0,z}} \left(\frac{p_{0,z}\, q_{t,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{t,z}} \right)$$	$$\underset{MR}{{}_0Q_t^{L}} = \sum_{z=1}^{Z} \frac{q_{t,z}}{q_{0,z}} \left(\frac{p_{0,z}\, q_{0,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}} \right)$$	
Crossing		
$${}_0P_t^{F} = \sqrt[2]{{}_0P_t^{L}\ {}_0P_t^{P}}$$	$${}_0Q_t^{F} = \sqrt[2]{{}_0Q_t^{L}\ {}_0Q_t^{P}}$$	

Tableau A.5.2: *Calcul indirect des IN*

Nombres index des prix (directs)	Nombres index des quantités (indirects)	Index de valeur totale
${}_0P_t^{L}$	${}_0Q_t^{P} = \frac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{L}}$	${}_0V_t = {}_0P_t^{L} \cdot {}_0Q_t^{P}$
${}_0P_t^{P}$	${}_0Q_t^{L} = \frac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{P}}$	${}_0V_t = {}_0P_t^{P} \cdot {}_0Q_t^{L}$
${}_0P_t^{F}$	${}_0Q_t^{F} = \frac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{F}}$	${}_0V_t = {}_0P_t^{F} \cdot {}_0Q_t^{F}$

Annexe 6

Les formules traditionnelles (Laspeyres, Paasche, Fisher), directes et indirectes, de la théorie des nombres index généralisés

Tableau A.6.1: *Calcul direct des g-IN comme Rapports de Dépense et Moyenne de Rapports*

Nombres index généralisés des prix	Nombres index généralisés des quantités
Rapports de Dépense	
${}_0P_t^{g\text{-}L}{}_{RS} = \dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}$	${}_0Q_t^{g\text{-}P}{}_{RS} = \dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}$
${}_0P_t^{g\text{-}P}{}_{RS} = \dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}$	${}_0Q_t^{g\text{-}L}{}_{RS} = \dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}$
Moyenne de Rapports	
${}_0P_t^{g\text{-}L}{}_{MR} = \sum_{z=1}^{Z} \dfrac{p_{t,z}}{p_{0,z}} \left(\dfrac{p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}} \right)$	${}_0Q_t^{g\text{-}P}{}_{MR} = \sum_{z=1}^{Z} \dfrac{q_{t,z}}{q_{0,z}} \left(\dfrac{p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}} \right)$
${}_0P_t^{g\text{-}P}{}_{MR} = \sum_{z=1}^{Z} \dfrac{p_{t,z}}{p_{0,z}} \left(\dfrac{p_{0,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}} \right)$	${}_0Q_t^{g\text{-}L}{}_{MR} = \sum_{z=1}^{Z} \dfrac{q_{t,z}}{q_{0,z}} \left(\dfrac{p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}} \right)$
Crossing	
${}_0P_t^{g\text{-}F} = \sqrt[2]{{}_0P_t^{g\text{-}L}\; {}_0P_t^{g\text{-}P}}$	${}_0Q_t^{g\text{-}F} = \sqrt[2]{{}_0Q_t^{g\text{-}L}\; {}_0Q_t^{g\text{-}P}}$

Tableau A.6.2: *Calcul des indicateurs de représentativité, du facteur Basket et des index de valeur*

Indicateur de représentativité en 0	Indicateur de représentativité en t	Facteur Basket	Index de valeur des co-présents	Index de valeur totale
$R_0 = \dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}}$	$R_t = \dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}}$	$B_{0t} = R_0 \cdot (R_t)^{-1}$	${}^{c}{}_0V_t = \dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}$	${}_0V_t = \dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}}$

Tableau A.6.3: *Calcul indirect des g-IN*

Nombres index généralisés des prix (directs)	Nombres index généralisés des quantités (indirects)	Facteur Basket	Index de valeur des co-présents	Index de valeur totale
${}_0P_t^{g\text{-}L}$	${}_0Q_t^{g\text{-}P} = \dfrac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{g\text{-}L} \cdot B_{0t}}$	$B_{0t} = \dfrac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{g\text{-}L} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}P}}$	${}^{c}{}_0V_t = {}_0P_t^{g\text{-}L} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}P}$	${}_0V_t = {}_0P_t^{g\text{-}L} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}P} \cdot B_{0t}$
${}_0P_t^{g\text{-}P}$	${}_0Q_t^{g\text{-}L} = \dfrac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{g\text{-}P} \cdot B_{0t}}$	$B_{0t} = \dfrac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{g\text{-}P} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}L}}$	${}^{c}{}_0V_t = {}_0P_t^{g\text{-}P} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}L}$	${}_0V_t = {}_0P_t^{g\text{-}P} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}L} \cdot B_{0t}$
${}_0P_t^{g\text{-}F}$	${}_0Q_t^{g\text{-}F} = \dfrac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{g\text{-}F} \cdot B_{0t}}$	$B_{0t} = \dfrac{{}_0V_t}{{}_0P_t^{g\text{-}F} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}F}}$	${}^{c}{}_0V_t = {}_0P_t^{g\text{-}F} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}F}$	${}_0V_t = {}_0P_t^{g\text{-}F} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}F} \cdot B_{0t}$

Annexe 7

Les formules traditionnelles (Laspeyres, Paasche, Fisher), directes et indirectes, de la théorie des nombres index généralisés selon une approche systémique

Les mêmes formules de l'Annexe 6 post-multipliés par les fonctions indicatrices sectorielles et territoriales restent valables. On présume un contexte de marchés financiers en présence de plusieurs marchés territoriaux (l) et sectoriels (s), de deux périodes (0 et t) de relèvement des biens, des prix, et des quantités traités.

Définition A.7.1: *fonction indicatrice sectorielle*
Soient les $s_{,z}$ (avec s = 1,2....,S) les S secteurs des biens (par exemple actions) du panier. Une application non négative

$$I_{[s=1],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } s_{,z} = 1 \\ 0 \text{ pour } s_{,z} \neq 1 \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z)$$

est dite fonction indicatrice du premier secteur,

$$I_{[s=2],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } s_{,z} = 2 \\ 0 \text{ pour } s_{,z} \square 2 \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z)$$

est dite fonction indicatrice du deuxième secteur,

$$I_{[s=S],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } s_{,z} = S \\ 0 \text{ pour } s_{,z} \neq S \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z)$$

est dite fonction indicatrice du $S^{\text{-ième}}$ secteur. Î

Î **Définition A.7.2:** *fonction indicatrice territoriale*
Soient les $l_{,z}$ (avec l = 1,2....,L) les L pays des marchés actionnaires considérés. Une application non négative

$$I_{[l=1],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } l_{,z} = 1 \\ 0 \text{ pour } l_{,z} \neq 1 \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z)$$

est dite fonction indicatrice du premier pays,

$$I_{[l=2],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } l_{,z} = 2 \\ 0 \text{ pour } l_{,z} \neq 2 \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z)$$

est dite fonction indicatrice du deuxième pays,

$$I_{[l=S],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } l_{,z} = L \\ 0 \text{ pour } l_{,z} \neq L \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z)$$

est dite fonction indicatrice du $L^{\text{-ième}}$ pays. Î

Par exemple, le nombre index général de g-laspeyres des prix peut donc être écrit comme

$${}_0P_t{}^{g\text{-}L}_{RS} = \frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}} = {}_0P_t{}^{g\text{-}L}_{RS}\,{}_{[\cup_L l;\cup_S s]} = \frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[\cup_L l],z}\, I_{[\cup_S s],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[\cup_L l],z}\, I_{[\cup_S s],z}} \qquad \text{(A.7.1)}$$

Ou bien il peut être, grâce à l'agrégativité de l'index, défini comme somme pondérée de g-laspeyres des prix sectoriels et territoriaux

$$ {}_0\underset{RS}{P_t^{g-L}} = \sum_{s=1}^{S} \sum_{l=1}^{L} {}_0\underset{RS}{P_t^{g-L}}{}_{[s,l]} \frac{{}^cV_{00,s,l}}{\sum_{s=1}^{S}\sum_{l=1}^{L} {}^cV_{00,s,l}} \tag{A.7.2} $$

Idem vaut pour le Paasche des quantités, lui même agrégatif (Tableau A.7.2).

Donc pour un système territorial et/ou sectoriel d'index financiers fondé sur les traditionnelles formules de Laspeyres, Paasche il sera nécessaire (pour éviter le calcul direct sur les titres de chaque sous-marché actionnaire) de disposer des index suivants:

1. Indice de Laspeyres (par exemple des prix) territorial et/ou sectoriel ;
2. Co-facteur: Index de Paasche de la quantité territoriale et/ou sectorielle;
3. Valeurs au temps 0;
4. Valeurs au temps t;
5. Valeurs co-présents au temps 0;
6. Valeurs co-présents au temps t;
7. Valeurs co-présents au prix t et quantité 0;
8. Index de valeur totale;
9. Index de valeur des co-présents.

Des précédents on pourra construire:

10. Les index globaux de Laspeyres des prix (utilisant les items 1 et 5) voir Tableau A.7.1;
11. Les index globaux de Paasche des quantités (utilisant les items 2 et 7) voir Tableau A.7.2;
12. Les indicateurs de représentativité en 0 (utilisant les items 3 et 5);
13. Les indicateurs de représentativité en t (utilisant les items 4 et 6);
14. Les facteurs Basket (utilisant les items 10 et 11);
15. Les index de valeur totale globaux (utilisant les items 3 et 4 ou bien 10, 11, 14);
16. Les index de valeur globaux des co-présents (utilisant les items 5 et 6 ou bien 10, 11).

Naturellement, pour les Fisher ils devraient être ainsi calculés:

17. Index de Paasche des prix territorial et/ou sectoriel;
18. Co-facteur: Index de Laspeyres des quantités territorial et/ou sectoriel;
19. Valeurs co-présents au prix 0 et quantité t.

Des indices précédents on pourra construire:

20. Les index globaux de Paasche des prix (utilisant les items 17 et 19);
21. Les index globaux de Laspeyres des quantités (utilisant les items 18 et 5);
22. Les index de Fisher des prix (utilisant les items 10 et 20) voir Définition A.4.1;
23. Les index de des quantités (utilisant les items 11 et 21) voir Définition A.4.1.

Avec douze index/valeurs[7] pour chaque secteur et/ou territoire on pourra construire un système d'index basé sur les Laspeyres, les Paasche et les Fisher. Le fait de ne pas devoir traiter les données directement et donc la possibilité de travailler sur des agrégations et des index à une utilité évidente surtout où, comme dans le cas des « Stock Exchange » européennes, il n'y a pas une coordination centralisée.

[7] En vérité dix serrait suffisant. En fait, grâce à l'Opérateur A.2.1, l'item 2 peut être calculé utilisant les Items 1 et 16 tandis que l'item 18 utilisant les Items 16 et 17. Et ils deviennent six si on considère que les g-index de Laspeyres et de Paasche (des prix et des quantités) peuvent être calculé utilisant les Items 5, 6, 7, 19, et qu'évidemment les Index de valeur (items 8 et 9) peuvent être calculé utilisant les Items 3, 4, 5, 6.

Dans l'optique d'améliorer l'information du système on peut utiliser d’autres fonctions, par exemple:

- # d'actions territorial et/ou sectoriel;
- Minimum des rapports de prix et de quantité;
- Maximum des rapports de prix et de quantité;
- Et cetera.

Selon l'approche systémique seulement peu d'index (avec leurs co-facteurs), qui peuvent satisfaire les propriétés axiomatiques essentielles (Définition A.3.2), sont eux même agrégatif. En particulier:

- Laspeyres et Paasche sont Co, Ho, Mo, Ag (évidemment leurs co-facteurs ont les mêmes propriétés);
- *cof*(Fisher) et Fisher (1922) sont Co, Ho, Mo, AgI (voir Verrecchia 2003,2004[12]), AnB, AnF;
- *cof*(Martini) et Martini (1992) sont Co, Ho, Mo, Ag, AnB, AnF.

Différents index célèbres ne sont pas agrégatifs, par exemple:

- *cof*(Sato-Vartia) et Sato-Vartia (1974) sont Co, Ho, Mo, As, AnB, AnF;
- Walsh (1901) set Co, Ho, Mo, Ag, AnB mais le *cof*(Walsh) est Co, Ho, Mo, AnB;
- Diewert[8] (1976) est Co, Ho, Mo, AnB et le *cof*(Diewert) est Co, Ho, AnB.

Tableau A.7.1: Index de g-Laspeyres des prix sectoriels et territoriaux ${}_0P_t^{g-L}{}_{[l=.\,;\,s=.]}$. Les marginales, construites par l’agrégativité, représentent les pays, les secteurs et leur union.

Secteur (S)	**Pays (L)**			
	l = 1	**l = 2**	**…**	$\cup_L$ **l**
s=1	$\frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=1],z}\, I_{[s=1],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=1],z}\, I_{[s=1],z}}$	$\frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=2],z}\, I_{[s=1],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=2],z}\, I_{[s=1],z}}$		${}_0P_{t\,RS}^{g-L}{}_{[\cup_L l,\, s=1]} = \sum_{l=1}^{L} {}_0P_{t\,RS}^{g-L}{}_{[l,\, s=1]} \frac{{}^{c}V_{00,l}\, I_{[s=1]}}{\sum_{l=1}^{L} {}^{c}V_{00,l}\, I_{[s=1]}}$
s=2	$\frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=1],z}\, I_{[s=2],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=1],z}\, I_{[s=2],z}}$	$\frac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=2],z}\, I_{[s=2],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=2],z}\, I_{[s=2],z}}$		${}_0P_{t\,RS}^{g-L}{}_{[\cup_L l,\, s=2]} = \sum_{l=1}^{L} {}_0P_{t\,RS}^{g-L}{}_{[l,\, s=2]} \frac{{}^{c}V_{00,l}\, I_{[s=2]}}{\sum_{l=1}^{L} {}^{c}V_{00,l}\, I_{[s=2]}}$
…				
$\cup_S$ **s**	${}_0P_{t\,RS}^{g-L}{}_{[l=1,\cup_S s]} = \sum_{s=1}^{S} \ldots$	${}_0P_{t\,RS}^{g-L}{}_{[l=2,\cup_S s]} = \sum_{s=1}^{S} \ldots$		${}_0P_{t\,RS}^{g-L} = \sum_{s=1}^{S} \sum_{l=1}^{L} {}_0P_{t\,RS}^{g-L}{}_{[s,\, l]} \frac{{}^{c}V_{00,s,l}}{\sum_{s=1}^{S}\sum_{l=1}^{L} {}^{c}V_{00,s,l}}$

[8] L'index de Diewert satisfait les propriétés axiomatiques essentielles avec ρ=2 (car il est égal à l'index de Fisher).

Tableau A.7.2: Index de g-Paasche des quantités sectoriels et territoriaux ${}_0Q_t^{g\text{-}P}{}_{[l=.\,;\,s=.]}$. Les marginales, construites par l'agrégativité, représentent les pays, les secteurs et leur union.

Secteur (S)	**Pays(L)**			
	l = 1	**l = 2**	**…**	**$\cup_L$ l**
s=1	$\dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=1],z}\, I_{[s=1],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=1],z}\, I_{[s=1],z}}$	$\dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=2],z}\, I_{[s=1],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=2],z}\, I_{[s=1],z}}$		${}_0Q_{t\,RS}^{g\text{-}P}{}_{[\cup_L l,\,s=1]} = \sum_{l=1}^{L} {}_0Q_{t\,RS}^{g\text{-}P}{}_{[l,\,s=1]} \dfrac{{}^{c}V_{t0,\,l}\, I_{[s=1]}}{\sum_{l=1}^{L} {}^{c}V_{t0,\,l} I_{[s=1]}}$
s=2	$\dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=1],z}\, I_{[s=2],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=1],z}\, I_{[s=2],z}}$	$\dfrac{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=2],z}\, I_{[s=2],z}}{\sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z}\, I_{[l=2],z}\, I_{[s=2],z}}$		${}_0Q_{t\,RS}^{g\text{-}P}{}_{[\cup_L l,\,s=2]} = \sum_{l=1}^{L} {}_0Q_{t\,RS}^{g\text{-}P}{}_{[l,\,s=2]} \dfrac{{}^{c}V_{t0,\,l}\, I_{[s=2]}}{\sum_{l=1}^{L} {}^{c}V_{t0,\,l} I_{[s=2]}}$
…				
$\cup_S$ s	${}_0Q_t^{g\text{-}P}{}_{[\,l=1\,;\,\cup_S s]} = \sum_{s=1}^{S}$ …	${}_0Q_t^{g\text{-}P}{}_{[\,l=2\,;\,\cup_S s]} = \sum_{s=1}^{S}$ …		${}_0Q_{t\,RS}^{g\text{-}P} = \sum_{l=1}^{L} \sum_{s=1}^{S} {}_0Q_{t\,RS}^{g\text{-}P}{}_{[l,\,s]} \dfrac{{}^{c}V_{t0,\,l,\,s}}{\sum_{s=1}^{S}\sum_{l=1}^{L} {}^{c}V_{t0,\,l,s}}$

Bibliographie

[1] Diewert W. E., « *Exact and superlative index number*: Journal of Econometrics », vol. 4, pp 115-145, 1976.

[2] Diewert W. E., « *Essays in Index Number Theory: an Overview of Volume 1, Discussion paper n°: 92-31* », Department of Economics, The University of British Columbia, Vancouver, 1992.

[3] Eichhorn W., Voeller J., « *Theory of the price index: Fisher's test approach and generalisations. Lecture notes in economics and mathematical systems* », Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[4] Fisher I., « *The making of index numbers: a study of their Varities, Tests, and Reliability* », reprinted by Augustus M. Kelley Publishers, New York, 1922.

[5] Lamberton D., Lapeyre B., « *Introduction to Stochastic calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2000.

[6] Martini M., « *I numeri indice in un approccio assiomatico* », Giuffré, Milano, 1992.

[7] Martini M., « *Numeri indice per il confronto nel tempo e nello spazio* », CUSL, Milano, pp 79-108, 2001.

[8] Pliska S.R., « *Introduction to mathematical Finance: discrete time models* », Blackwell Publishers, Oxford, 1997.

[9] Sato K., « *Ideal index numbers that almost satisfy factor reversal test* ». The Review of Economics and Statistics, 56, pp 549-552, 1974.

[10] Verrecchia F., Zavanella B., « *Methodological Problems in Index Numbers' Construction For Multi-Temporal Comparison in the Financial Field* », in: Atti della XLI Riunione Scientifica SIS, Milano, pp 529-532, 2002.

[11] Verrecchia F., « *Index numbers system for spatial and time comparison applied to finance* », in: Atti del Convegno Intermedio SIS, Napoli, 2003.

[12] Verrecchia F., « *Aggregative Index Numbers Minimal System* », in: Atti XLI Riunione Scientifica SIS, Bari, 2004.

[13] Verrecchia F., « *Generalizzazione delle tradizionali formules della teoria dei numeri indice: Laspeyres, Paasche, Fisher generalizzati* », Congiuntura, n°4, Udine, pp 77-97, 2004.

[14] Vogt A., « *Das statistiche Indexproblem im zwei-Situationen-Fall* », Juris Druck-Verlag, Zurich, 1979.

[15] Walsh C. M., « *The measurement of General Exchange-Value* », New York, Macmillan, 1901.

[16] Williams D., « *Probability with Martingales* », Cambridge University press, Cambridge, 1991.