

Un cadre de travail alternatif pour la correction des variations saisonnières de séries temporelles univariées et multivariées

Stéphane Gregoir

CREST - INSEE

8th March 2005

Introduction: le cadre de travail général

- Les statisticiens ne s'accordent pas sur la définition de la composante saisonnière d'une série temporelle : toute définition rigoureuse nécessite un modèle et il n'y a pas de consensus sur un modèle commun entre les différents utilisateurs ou les statisticiens.
- Les statisticiens ont utilisé une approche descriptive

$$y_t = TC_t + S_t + I_t$$

ou

$$y_t = T_t * C_t * S_t * I_t$$

Le modèle usuel suppose que les séries étudiées peuvent être décomposées en la somme de composantes non corrélées, une d'entre elles générant le profil saisonnier.

Introduction : quelques limites

- La pratique courante ne permet pas de satisfaire les besoins de la plupart des utilisateurs : les procédures de correction des variations saisonnières sont univariées mais les utilisateurs analysent simultanément des ensembles de séries (production, consommation des ménages, emploi, crédit, salaires, prix,...), (Porter (1975), Geweke (1979), Plosser (1979) and Wallis (1979)).
- En l'absence d'un traitement cohérent entre différentes variables d'intérêt, les relations de moyen et long terme peuvent être distordues (Sims (1974), Wallis (1974))

Introduction : quelques limites

- Influence des points extrêmes : sans source exogène clairement identifiée, ils sont identifiés par rapport à un modèle sélectionné. Cette identification dépend de l'échantillon disponible et n'est pas nécessairement stable au cours du temps. Une observation qualifiée de point extrême pour un échantillon particulier peut apparaître comme un point régulier dans un échantillon plus grand.
- La dernière observation disponible est analysée avec le plus de soin, mais est malheureusement peu fiable : elle est sujette à révision du fait de sa précocité et elle est obtenue en appliquant un traitement statistique non homogène qui nécessite des hypothèses.
- Cette instabilité est d'autant plus grande qu'un point aberrant se trouve à proximité. Si les traitements sont différents pour des séries liées et affectées par un même évènement extrême, les relations de court terme peuvent être distordues.

Introduction : objectifs

Introduire un cadre qui autorise

- les traitements joints de plusieurs séries temporelles
- l'usage de méthodes robustes d'estimation

Approche dans l'espace des temps qui vise à estimer au mieux les composantes saisonnières persistantes (déterministes et stochastiques) à ôter des séries initiales.

Les corrections des variations saisonnières

Persistence à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

Illustration

Conclusion

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistence à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en œuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Les corrections des variations saisonnières

Persistence à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA

Illustration

Conclusion

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistence à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Les corrections des variations saisonnières

Persistence à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA

Illustration

Conclusion

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistence à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistance à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistence à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistence à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistence à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Régression dans l'espace des temps

Projection sur des fonctions déterministes saisonnières

- dummies mensuelles ou trimestrielles
- fonctions sinusoïdales aux fréquences possibles

$$y_t = \sum_{j=0}^{s-1} \mu_j \mathbf{1}_{t-s[\frac{t}{s}]=j} + \epsilon_t$$

où si $s' = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$

$$y_t = \mu_0 + \mu_s (-1)^t \mathbf{1}_{s=2s'} + \sum_{j=1}^{s'} (\mu_{1,j} \cos(\omega_j t) + \mu_{2,j} \sin(\omega_j t)) + \epsilon_t$$

Les corrections des variations saisonnières

Persistence à des fréquences saisonnières

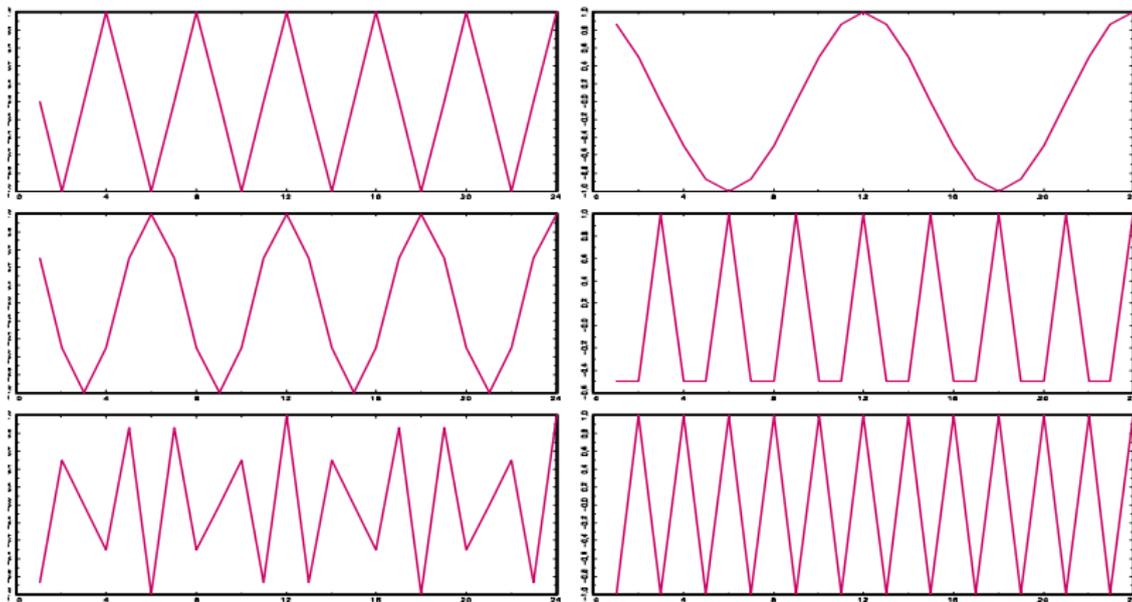
Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

Illustration

Conclusion

Profils saisonniers déterministes (cas mensuel)



Besoin de profils saisonniers évolutifs (1)

La marche aléatoire saisonnière (processus complexe): une racine unitaire à fréquence $\omega \in]0, \pi[$

$$y_t = e^{i\omega} y_{t-1} + \epsilon_t$$

La marche aléatoire saisonnière réelle : présence de deux racines unitaires $e^{i\omega}, e^{-i\omega}$

$$y_t = 2 \cos(\omega) y_{t-1} - y_{t-2} + \epsilon_t$$

Exemple

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

$$y_t = -y_{t-2} + \epsilon_t$$

Les corrections des variations saisonnières

Persistence à des fréquences saisonnières

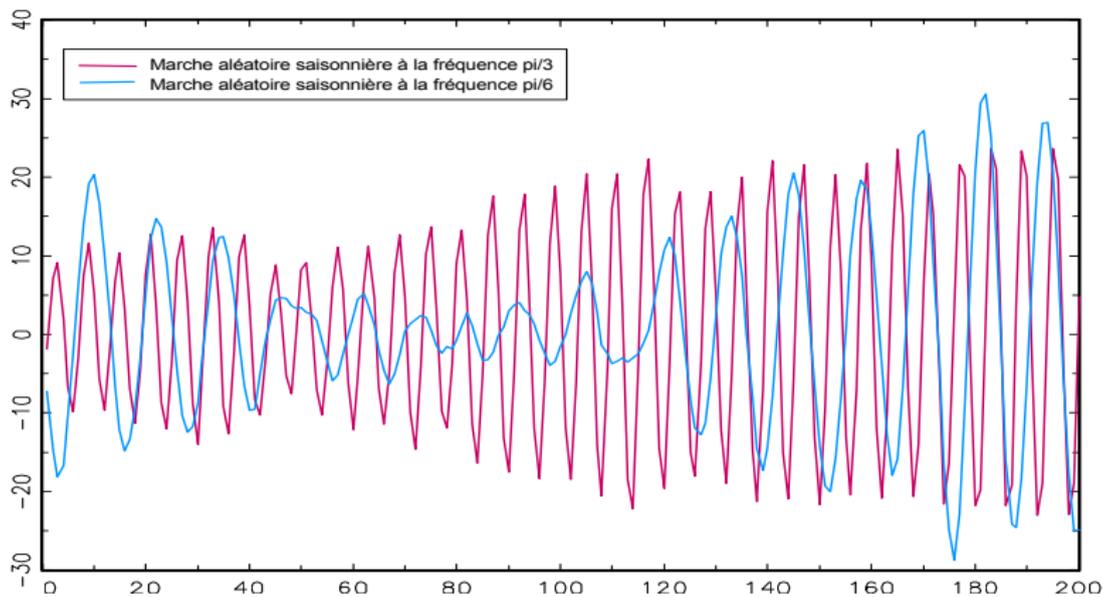
Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

Illustration

Conclusion

Besoin de profils saisonniers évolutifs (2)



Modélisation paramétrique dans l'espace des temps

- Séries temporelles structurelles: un modèle paramétrique est postulé pour chaque composante : tendance-cycle, composante saisonnière. Elles sont supposées orthogonales → Filtre de Kalman (conditions d'identification)

$$y_t = TC_t + S_t + I_t$$

$$TC_t = TC_{t-1} + \epsilon_{TC,t}$$

$$S_t - 2\cos(\omega)S_{t-1} + S_{t-2} = \epsilon_{S,t}$$

$$I_t = \epsilon_{I,t}$$

où $\epsilon_{TC,t}$, $\epsilon_{S,t}$ et $\epsilon_{I,t}$ sont indépendants.

Filtrage et analyse dans l'espace des fréquences

- Application de filtres qui éliminent les mouvements cycliques
- Analyse des propriétés de ces filtres dans le domaine des fréquences : gain et déphasage
- Difficultés pour traiter les extrémités d'échantillon.
 - Calcul de filtres asymétriques pour les extrémités: Méthode de Musgrave, méthode de la minimisation des révisions moyennes (pour des processus de générations des données a priori), méthodes de Kenny et Durbin : peut produire des déphasages.
 - Modélisation pour calcul de prévisions et de rétrovisions.

Modélisation paramétrique et filtre

- Modèle SARIMA :

$$(1 - B^s)^d (1 - B)^d \phi_s(B^s) \phi(B) y_t = \theta_s(B) \theta(B) \epsilon_t$$

quand cela est possible, une décomposition du processus en trois composantes orthogonales (tendance-cycle, saisonnière, irrégulière) est construite sous des hypothèses identifiantes (chaque composante satisfait une représentation SARIMA mais la position de ses racines est contrainte et la variabilité de l'irrégulier est maximale) → Filtre de Wiener-Kolmogorov : filtre symétrique

- Prévisions et rétrovisions pour permettre l'usage du filtre symétrique.
- Ce type de décomposition n'est pas toujours possible, même dans des cas où la série brute a des composantes saisonnières persistantes.

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistance à des fréquences saisonnières**
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Processus intégrés à des fréquences saisonnières

Les opérateurs de différences premières à diverses fréquences sont notés:

$$\Delta_{\omega}(B) = \begin{cases} \delta_{\omega}(B) = 1 - e^{-i\omega} B, & \omega \in \{0, \pi\} \\ 1 - 2\cos\omega B + B^2 = (1 - e^{-i\omega} B)(1 - e^{i\omega} B) = \delta_{\omega}(B)\delta_{-\omega}(B), & \omega \in]0, \pi[\end{cases}$$

où B est l'opérateur retard $By_t = y_{t-1}$.

Definition

Un processus réel purement non déterministe $\{x_t\}$ est dit intégré d'ordre h , h entier, à la fréquence ω , $\omega \in [0, \pi]$, ou $I_{\omega}(h)$, si $\Delta_{\omega}(B)^h x_t$ est stationnaire du second ordre et tel que le polynôme $c(u)$ associé à sa forme de Wold satisfait $c(e^{i\omega}) \neq 0$ (en conséquence $c(e^{-i\omega}) \neq 0$ quand $\omega \in]0, \pi[$).

Opérateurs d'intégration

Definition

L'opérateur d'intégration S_ω associée à toute suite

$y_t = (y_t, t = \dots, -1, 0, 1, \dots)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ la suite $S_\omega y$ définie par:

$$S_\omega y_t = \begin{cases} \sum_{\tau=1}^t y_\tau e^{-i\omega(t-\tau)} & t \geq 1 \\ 0 & t = 0 \\ -\sum_{\tau=t+1}^0 y_\tau e^{-i\omega(t+1-\tau)} & t < 0. \end{cases}$$

Quelques propriétés des opérateurs d'intégration

- $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$,

$$\delta_\omega S_\omega = I \quad (1)$$

- $\forall y_t \in \mathbb{R}$

$$\omega \in [0, \pi], S_\omega \delta_\omega y_t = y_t - y_0 e^{-i\omega t} \quad (2)$$

- (Commutativité) $\forall (\omega_1, \omega_2) \in [0, \pi]^2$,

$$S_{\omega_1} S_{\omega_2} = S_{\omega_2} S_{\omega_1} \quad (3)$$

- (Associativité) $\forall (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in [0, \pi]^3$,

$$(S_{\omega_1} S_{\omega_2}) S_{\omega_3} = S_{\omega_1} (S_{\omega_2} S_{\omega_3}) \quad (4)$$

- $\forall (\omega_1, \omega_2) \in [0, \pi]^2$,

$$S_{\omega_1} S_{\omega_2} = \frac{e^{i\omega_1}}{e^{i\omega_1} - e^{i\omega_2}} S_{\omega_2} + \frac{e^{i\omega_2}}{e^{i\omega_2} - e^{i\omega_1}} S_{\omega_1} \quad (5)$$

Quelques exemples

Exemple

$\forall \omega \in]0, \pi[$,

$$S_\omega S_{-\omega} = \frac{e^{-i\omega}}{e^{-i\omega} - e^{i\omega}} S_{-\omega} + \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - e^{-i\omega}} S_\omega$$

$$S_0 S_\omega S_{-\omega} = \frac{1}{2(1 - \cos\omega)} S_0 + \frac{1 - 2\cos\omega + B}{2(1 - \cos\omega)} S_\omega S_{-\omega}$$

$$S_\pi S_\omega S_{-\omega} = \frac{1}{2(1 + \cos\omega)} S_\pi + \frac{1 + 2\cos\omega - B}{2(1 + \cos\omega)} S_\omega S_{-\omega}$$

$\forall (\omega_1, \omega_2) \in]0, \pi[^2, \omega_1 \neq \omega_2$,

$$S_{\omega_1} S_{-\omega_1} S_{\omega_2} S_{-\omega_2} = \frac{2\cos\omega_1 - B}{2(\cos\omega_1 - \cos\omega_2)} S_{\omega_1} S_{-\omega_1} + \frac{2\cos\omega_2 - B}{2(\cos\omega_2 - \cos\omega_1)} S_{\omega_2} S_{-\omega_2}$$

Décomposition en une composante persistante et une composante transitoire : cas $I_0(1)$

- processus $I_0(1)$: mesure de la persistance des chocs (Campbell et Mankiw (1987), Cochrane (1988))
- processus $I_0(1)$: très grand nombre de décompositions en une composante persistante et une composante transitoire (Quah (1994))
- Décomposition de Beveridge-Nelson : la composante permanente est une marche aléatoire pure

Décomposition en une composante persistante et une composante transitoire : cas $l_\omega(1)$

Soit $\{x_t\}$ un processus complexe purement non déterministe intégré à la fréquence $\omega \in [0, \pi]$, la représentation de Wold de sa représentation stationnaire est donnée par:

$$\delta_\omega(B) x_t = c(B) \varepsilon_t$$

où $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc faible (complexe) σ_ε^2 .

Condition 1

$c(B) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p B^p$ est tel que such that $\sum_{p=0}^{+\infty} p |c_p| < +\infty$

Décomposition en une composante persistante et une composante transitoire : cas $l_\omega(1)$

Sous la condition 1, il existe une décomposition de la forme Beveridge-Nelson à la fréquence ω du polynôme $c(B)$ comme suit

$$c(B) = c(e^{i\omega}) + \tilde{c}_\omega(B) \delta_\omega(B)$$

où $\tilde{c}_\omega(B) = \sum_{p=0}^{+\infty} \tilde{c}_{\omega,p} B^p$ et $\tilde{c}_{\omega,p} = -\sum_{q=p+1}^{+\infty} c_k e^{i\omega(p-q)}$ tel que $\{\tilde{c}_\omega(B) \varepsilon_t\}$ est un processus stationnaire.

Décomposition en une composante persistante et une composante transitoire : cas $I_\omega(1)$

(1) donne

$$\delta_\omega(B)(x_t - c(e^{i\omega})S_\omega \varepsilon_t - \tilde{c}_\omega(B)\varepsilon_t) = 0$$

donc

$$x_t = \mu_t + c(e^{i\omega})S_\omega \varepsilon_t + \tilde{c}_\omega(B)\varepsilon_t$$

où $\mu_t = \mu e^{-i\omega t}$ est une fonction déterministe telle que $\delta_\omega(B)\mu_t = 0$.

- une composante $I_\omega(1)$ pure : $(\mu_t + c(e^{i\omega})S_\omega \varepsilon_t)$
- une composante stationnaire $(\tilde{c}_\omega(B)\varepsilon_t)$

Calcul de la prévision de long terme d'un processus démodulé

Opération de démodulation : $\{e^{i\omega t}x_t\}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow +\infty} E_t e^{i\omega h} x_{t+h} &= \mu e^{-i\omega t} + c(e^{i\omega}) \sum_{\tau=1}^t e^{-i\omega(t-\tau)} \varepsilon_\tau \\
 &+ \lim_{h \rightarrow +\infty} E_t \left(c(e^{i\omega}) \sum_{\tau=t+1}^{t+h} \varepsilon_\tau e^{-i\omega(t-\tau)} + e^{i\omega h} \tilde{c}_\omega(B) \varepsilon_{t+h} \right) \\
 &= \underbrace{\mu e^{-i\omega t} + c(e^{i\omega}) S_\omega \varepsilon_t}_{\text{la composante } I_\omega(1)} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow +\infty} e^{i\omega h} E_t \tilde{c}_\omega(B) \varepsilon_{t+h}}_{\text{tend vers 0}}
 \end{aligned}$$

Exemples

Exemple

Le cas le plus simple à la fréquence $\omega \in [0, \pi]$ est la marche aléatoire complexe :

$$x_t = e^{i\omega} x_{t-1} + \varepsilon_t$$

où $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc complexe. Dans ce cas,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} E_t e^{i\omega h} x_{t+h} = x_t.$$

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistance à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes**
 - **Exemple : le modèle Airline**
 - **Processus univarié**
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Le modèle Airline

- Le modèle airline (Box and Jenkins (1976)) est défini par

$$(1 - B)(1 - B^s)y_t = (1 - \theta B)(1 - \Theta B^s)\varepsilon_t$$

- $s = 4$
- Par (1) et la propriété de commutativité

$$(1 - B)(1 - B^4)S_0^2 S_\pi S_{\frac{\pi}{2}} S_{-\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\forall t \in \mathbb{Z}, (1 - B)(1 - B^4) [y_t - (1 - \theta B)(1 - \Theta B^4) S_0^2 S_\pi S_{\frac{\pi}{2}} S_{-\frac{\pi}{2}} \varepsilon_t] = 0$$

Il existe

$$\mu_t = \mu_{0,2} t + \mu_{0,1} + \mu_{\pi,1} (-1)^t + \mu_{\frac{\pi}{2},1} e^{i\frac{\pi}{2}t} + \overline{\mu_{\frac{\pi}{2},1}} e^{-i\frac{\pi}{2}t}$$

tel que

$$y_t = \mu_t + (1 - \theta B)(1 - \Theta B^4) S_0^2 S_\pi S_{\frac{\pi}{2}} S_{-\frac{\pi}{2}} \varepsilon_t$$

Par (5),

$$S_0^2 S_\pi S_{\frac{\pi}{2}} S_{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \left(S_0^2 + \frac{3}{2} S_0 + \frac{1}{2} S_\pi + \frac{1}{1-i} S_{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{1+i} S_{-\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_{0,2t} + \mu_{0,1} + \frac{1}{4} (1 - \theta B) (1 - \Theta B^4) \left(S_0^2 + \frac{3}{2} S_0 \right) \varepsilon_t \\ &\quad + \mu_{\pi,1} (-1)^t + \frac{1}{8} (1 - \theta B) (1 - \Theta B^4) S_\pi \varepsilon_t \\ &\quad + \mu_{\frac{\pi}{2},1} e^{i\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{4} (1 - \theta B) (1 - \Theta B^4) \frac{1}{1-i} S_{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_t \\ &\quad + \mu_{-\frac{\pi}{2},1} e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{4} (1 - \theta B) (1 - \Theta B^4) \frac{1}{1+i} S_{-\frac{\pi}{2}} \varepsilon_t \end{aligned}$$

En utilisant les développements suivants:

$$(1 - \theta B)(1 - \Theta B^4) = (1 + \theta)(1 - \Theta) + \theta_{\pi}(B) \delta_{\pi}(B)$$

avec

$$\theta_{\pi}(B) = (-\theta + \Theta(\theta + 1)(1 - B + B^2 - B^3) + \Theta\theta B^4)$$

et

$$(1 - \theta B)(1 - \Theta B^4) = (1 + i\theta)(1 - \Theta) + \theta_{\frac{\pi}{2}}(B) \delta_{\frac{\pi}{2}}(B)$$

avec

$$\theta_{\frac{\pi}{2}}(B) = \Theta(1 - i\theta)(1 - iB - B^2 + iB^3) + i\theta(1 - \Theta B^4)$$

Le modèle Airline

Nous proposons de définir les composantes saisonnières sur la base des marches aléatoires pures

$$y_t = y_t^s + y_t^*$$

avec

$$y_t^* = \mu_{0,2}t + \mu_{0,1} + \frac{1}{4} (1 - \theta B) (1 - \Theta B^4) \left(S_0^2 + \frac{3}{2} S_0 \right) \varepsilon_t + \theta(B) \varepsilon_t$$

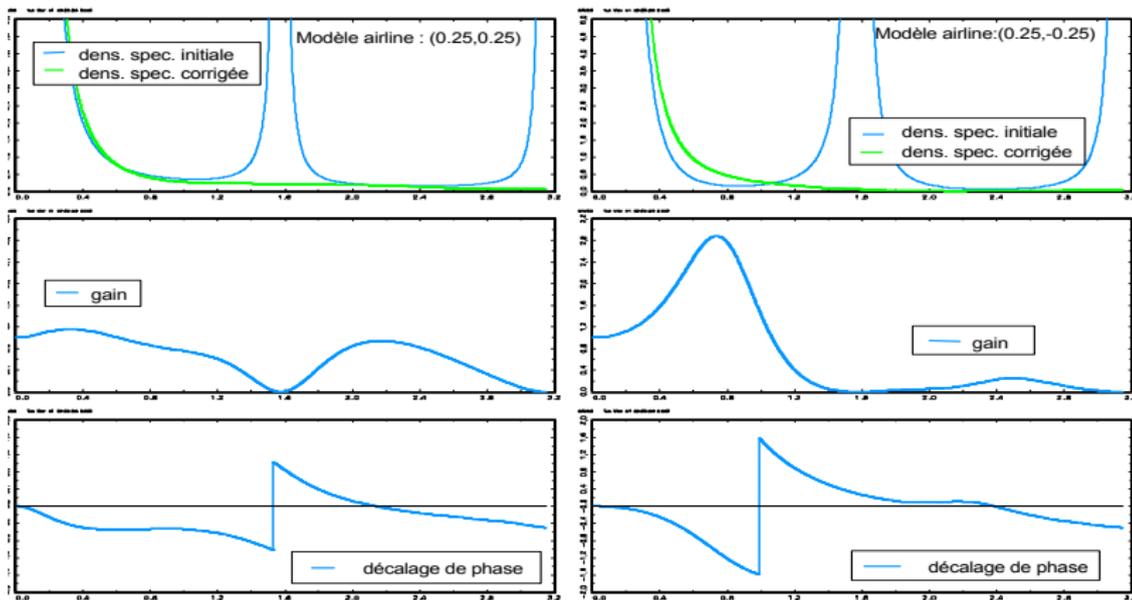
où

$$\theta(B) = \frac{1}{8} \left[3((1 + \theta)\Theta - \theta) + \Theta(1 - 3\theta)B - 3(1 + \theta)\Theta B^2 + \Theta(\theta - 3)B^3 + 3\Theta\theta B^4 \right]$$

et

$$y_t^s = \mu_{\pi,1} (-1)^t + \frac{1}{8} (1 + \theta) (1 - \Theta) S_{\pi} \varepsilon_t \\ + \mu_{\frac{\pi}{2},1} e^{i\frac{\pi}{2}t} + \overline{\mu_{\frac{\pi}{2},1}} e^{-i\frac{\pi}{2}t} + \frac{1 - \Theta}{4} \left(\frac{(1 - i\theta)}{1 - i} S_{\frac{\pi}{2}} + \frac{(1 + i\theta)}{1 + i} S_{-\frac{\pi}{2}} \right) \varepsilon_t$$

Le modèle Airline : analyse spectrale



Le modèle Airline : analyse spectrale

- Cette décomposition existe toujours
- Le décalage de phase est nul pour les longs cycles
- Le gain peut être très supérieur à 1

Processus de génération des données

Le processus de génération des données considéré est :

$$y_t = d_t + x_t$$

où d_t est une composante déterministe qui est une combinaison linéaire des fonctions déterministes $\{e^{iv_j t}\}_{v_j \in \Omega_d}$ avec $\Omega_d = \{v_0, \dots, v_l\}$ et $\{x_t\}$ est un processus intégré d'ordre 1 (en général) aux diverses fréquences dans $\Omega_x = \{\omega_0, \dots, \omega_k\}$.

Ω_d et Ω_x sont des sous-ensembles de $\{\tilde{\omega}_j = \frac{2j\pi}{s}, j \in \{0, 1, \dots, s\}\}$ des fréquences saisonnières associées à s observations par an.

Processus de génération des données :

$$\begin{cases} y_t = d_t + x_t \\ d_t = \sum_{j=0}^l \mu_{v_j} e^{iv_j t} \\ \Delta_x(B) x_t = c(B) \varepsilon_t \end{cases}$$

où

$$\Delta_x = \prod_{\omega \in \Omega_x} \delta_\omega$$

et $c(B)$ satisfait la Condition 1

Nous avons

$$\prod_{j=0}^k S_{\omega_j} = \sum_{j=0}^k \phi_j S_{\omega_j}$$

avec

$$\phi_j = \frac{1}{\Delta_{x,-j}(e^{i\omega_j})}$$

où

$$\Delta_{x,-j} = \prod_{m=0, m \neq j}^k \delta_{\omega_m}$$

A chaque fréquence

$$c(B) S_{\omega_j} \varepsilon_t = c(e^{i\omega_j}) S_{\omega_j} \varepsilon_t + \tilde{c}_{\omega_j}(B) \varepsilon_t$$

$$y_t = y_t^* + y_t^s$$

avec

$$y_t^* = \mu_{v_0} + \mu_{x,\omega_0} + \phi_0 c(B) S_0 \varepsilon_t + \sum_{j=1}^k \phi_j \tilde{c}_{\omega_j}(B) \varepsilon_t$$

et

$$y_t^s = \sum_{j=1}^l \mu_{v_j} e^{iv_j t} + \sum_{j=1}^k \mu_{x,\omega_j} e^{-i\omega_j t} + \sum_{j=1}^k \phi_j c(e^{i\omega_j}) S_{\omega_j} \varepsilon_t$$

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistence à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 **Mise en œuvre dans un cadre SARIMA**
 - **Démodulation et composante persistante de long terme**
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Remarque préliminaire (1)

Pour $t \geq 0$:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} E_t e^{i\omega(t+h)} x_{t+h} = \mu_\omega + c (e^{i\omega}) \sum_{\tau=1}^t e^{i\omega\tau} \varepsilon_\tau$$

mais

$$\begin{aligned} e^{i\omega(t+h)} x_{t+h} &= e^{i\omega t} x_t + \sum_{\tau=1}^h \left(e^{i\omega(t+\tau)} x_{t+\tau} - e^{i\omega(t+\tau-1)} x_{t+\tau-1} \right) \\ &= e^{i\omega t} x_t + \sum_{\tau=1}^h e^{i\omega(t+\tau)} \delta_\omega(B) x_{t+\tau} \end{aligned}$$

Remarque préliminaire (2)

$$\mu_\omega + c (e^{i\omega}) \sum_{\tau=1}^t e^{i\omega\tau} \varepsilon_\tau = e^{i\omega t} x_t + \sum_{\tau=1}^{+\infty} e^{i\omega(t+\tau)} E_t \delta_\omega (B) x_{t+\tau}$$

en démodulant à la fréquence ω

$$\mu_\omega e^{-i\omega t} + c (e^{i\omega}) S_\omega \varepsilon_t = x_t + \sum_{\tau=1}^{+\infty} e^{i\omega\tau} E_t \delta_\omega (B) x_{t+\tau}$$

Processus univarié SARIMA

Processus de génération des données :

$$\Phi(B) \Phi_s(B^s) \Delta_x(B) x_t = \Theta(B) \Theta_s(B^s) \varepsilon_t$$

où $d^0\Phi = P$, $d^0\Phi_s = P_s$, $d^0\Theta = Q$, $d^0\Theta_s = Q_s$ et toutes les racines de ces polynômes ont un module strictement supérieur à 1. Nous considérons le processus de dimension $(P + sP_s + Q + sQ_s) \times 1$:

$$z_t = \left(\Delta_x(B) x_t \quad \dots \quad \Delta_x(B) x_{t-(P+sP_s)} \quad \varepsilon_t \quad \dots \quad \varepsilon_{t-(Q+sQ_s)} \right)'$$

$$\zeta_t = \left(\varepsilon_t \quad 0 \dots 0 \quad \varepsilon_t \quad 0 \dots 0 \right)'$$

et la matrice compagnon usuelle C associée à ce processus de dimension $(P + sP_s + Q + sQ_s) \times (P + sP_s + Q + sQ_s)$ telle que

$$z_t = C z_{t-1} + \zeta_t$$

Processus univarié SARIMA

$$E_t z_{t+\tau} = C^\tau z_t$$

d'où si $K = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$ alors

$$\begin{aligned} K' \sum_{\tau=1}^{+\infty} e^{i\omega\tau} E_t \Delta_x(B) x_{t+\tau} &= K' \left(\sum_{\tau=1}^{+\infty} e^{i\omega\tau} C^\tau \right) z_t \\ &= K' (I_{P+sP_s+Q+sQ_s} - e^{i\omega} C)^{-1} e^{i\omega} C z_t \end{aligned}$$

$$x_t^s = \sum_{j=1}^k \frac{\Delta_{x,-j} x_t + K' (I_{P+sP_s+Q+sQ_s} - e^{i\omega_j} C)^{-1} e^{i\omega_j} C z_t}{\Delta_{x,-j} (e^{i\omega_j})}$$

Les corrections des variations saisonnières

Persistence à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA

Illustration

Conclusion

Une série mensuelle

Une série trimestrielle

Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistence à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 **Illustration**
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

Test de racine unitaire

Table: Test des racines unitaires

Consommation des ménages en produits manufacturés				
Fréquence	Statistique de test	niveau à 5%	décision	
0	67.97	3.11	accepte H_0	
$\frac{\pi}{6}$	5.15	3.22	accepte H_0	
$\frac{\pi}{3}$	14.87	3.22	accepte H_0	
$\frac{\pi}{2}$	3.86	3.22	accepte H_0	
$\frac{2\pi}{3}$	3.85	3.22	accepte H_0	
$\frac{5\pi}{6}$	11.37	3.22	accepte H_0	
π	1.29	3.11	rejet de H_0	

Les corrections des variations saisonnières

Persistance à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

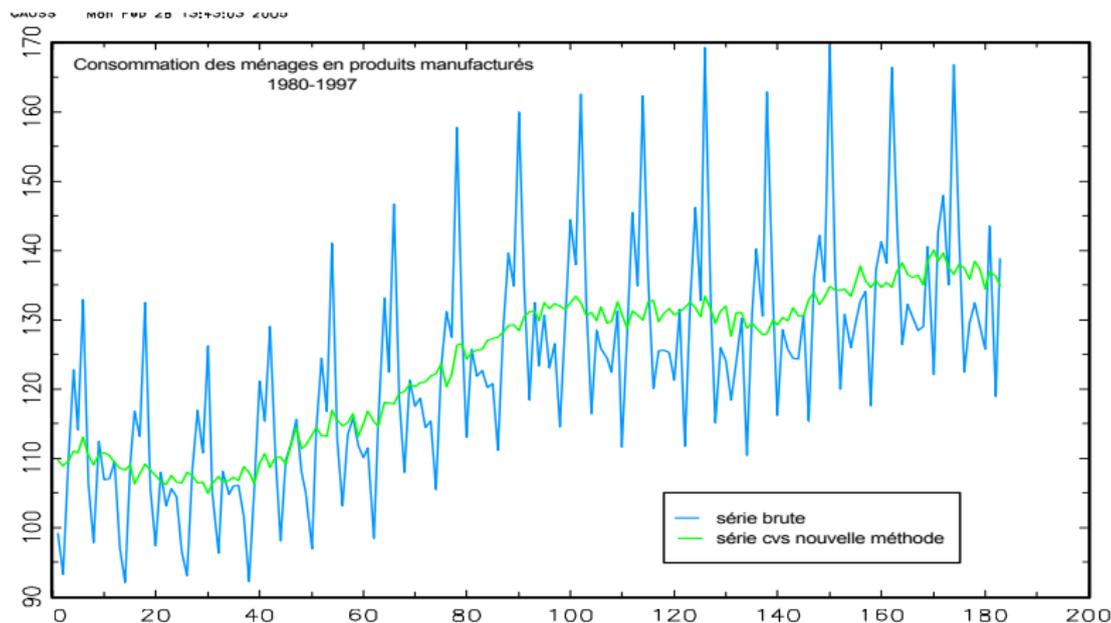
Illustration

Conclusion

Une série mensuelle

Une série trimestrielle

Consommation des ménages français en produits manufacturés



Les corrections des variations saisonnières

Persistance à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

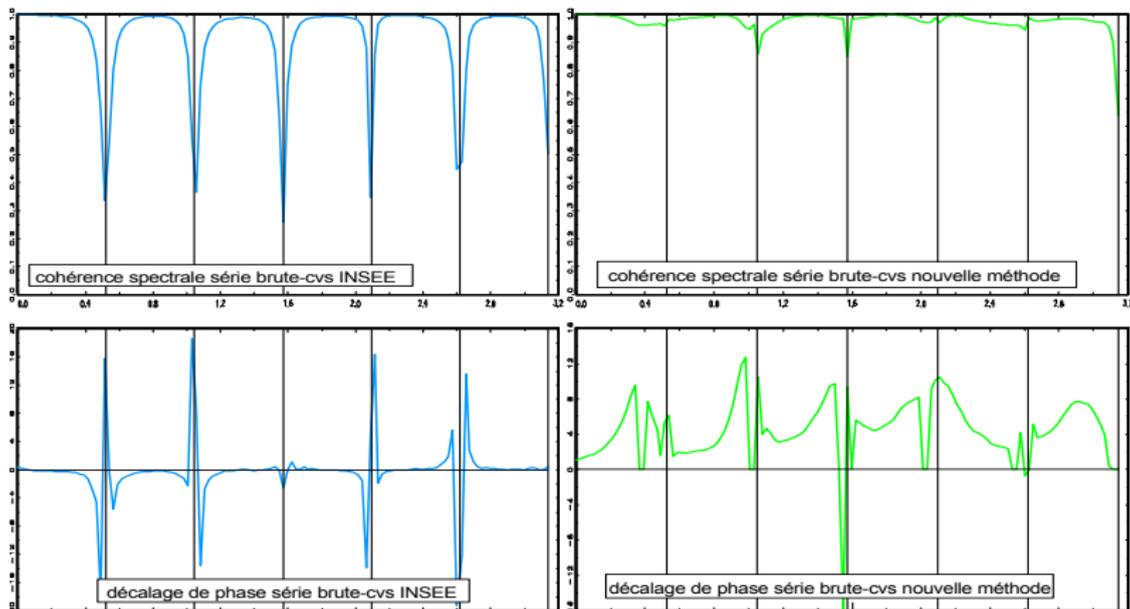
Illustration

Conclusion

Une série mensuelle

Une série trimestrielle

Analyse spectrale



Les corrections des variations saisonnières

Persistance à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

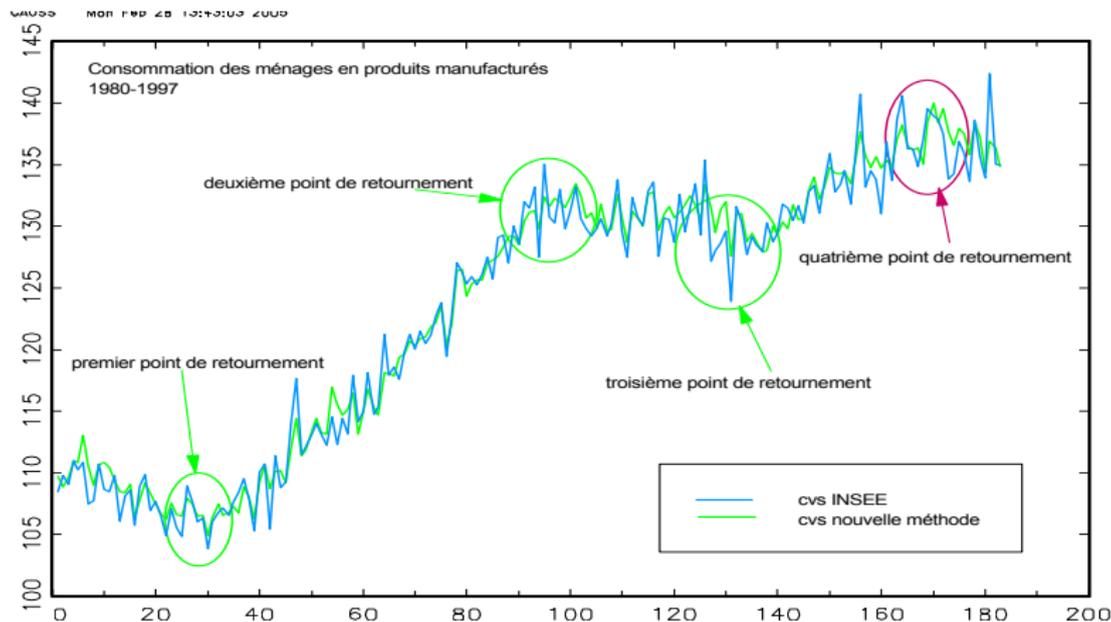
Illustration

Conclusion

Une série mensuelle

Une série trimestrielle

Analyse des points de retournement



Les corrections des variations saisonnières

Persistence à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

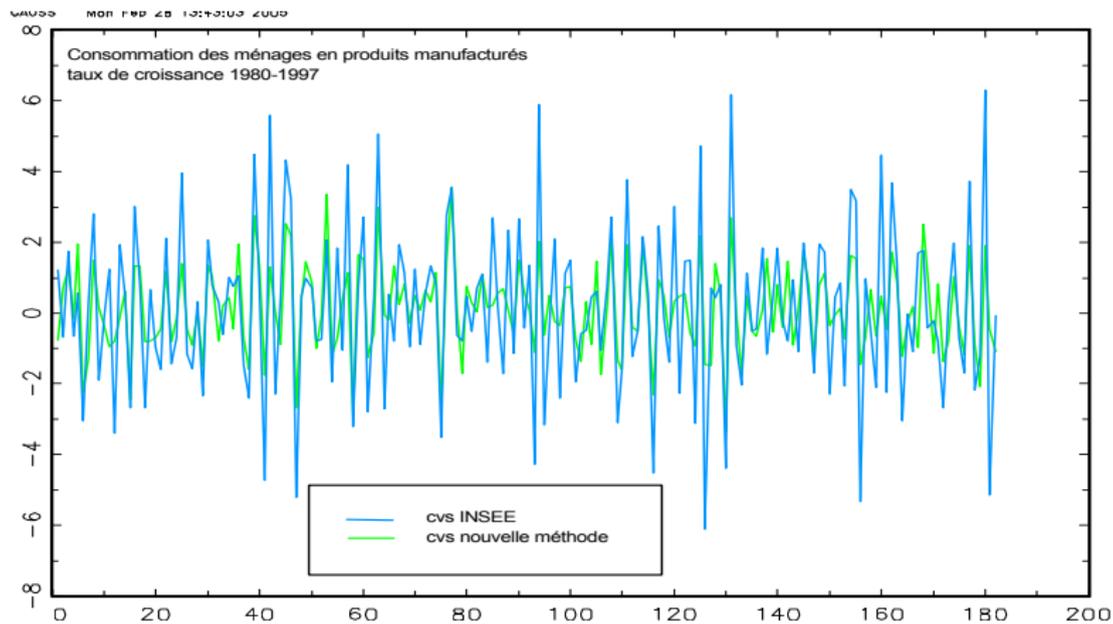
Illustration

Conclusion

Une série mensuelle

Une série trimestrielle

Taux de croissance



Consommation privée japonaise

Table: Test de racines saisonnières

Consommation privée japonaise				
Fréquence	Statistique de test	Niveau à 5%	décision	
0	81.04	3.11	accepte H_0	
$\frac{\pi}{2}$	7.20	3.22	accepte H_0	
π	4.89	3.11	accepte H_0	

Les corrections des variations saisonnières

Persistance à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

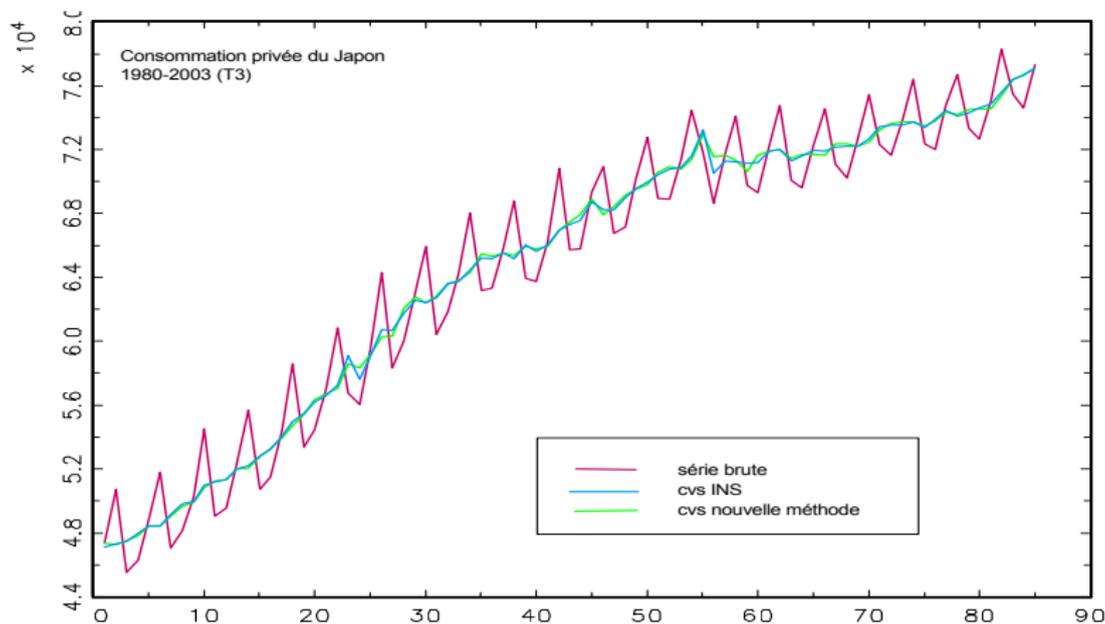
Illustration

Conclusion

Une série mensuelle

Une série trimestrielle

Séries brute et désaisonnalisées



Les corrections des variations saisonnières

Persistance à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

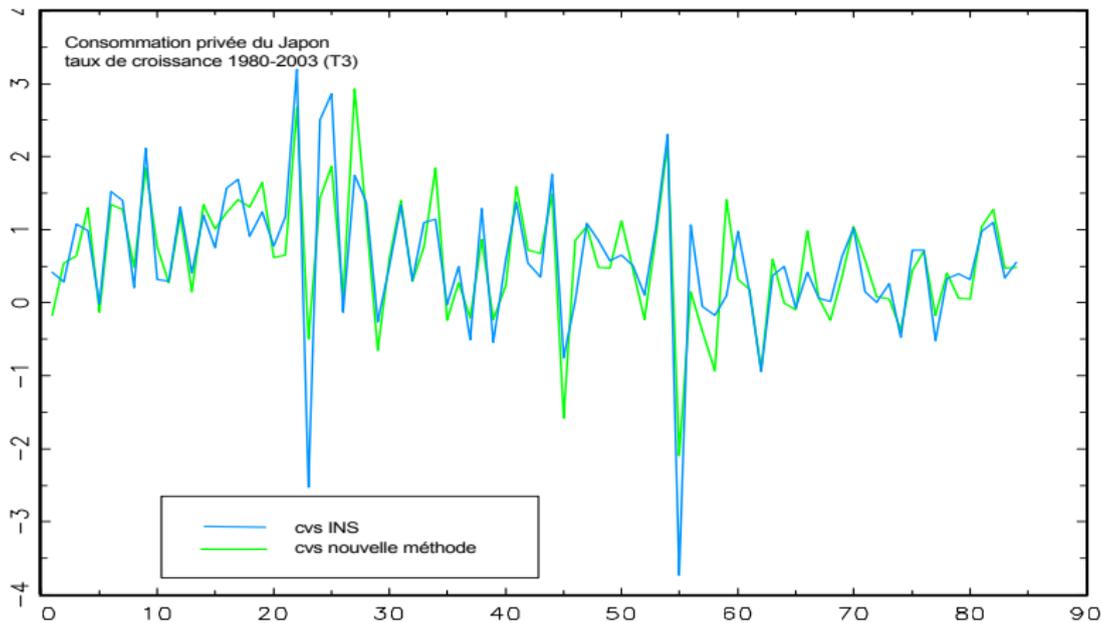
Illustration

Conclusion

Une série mensuelle

Une série trimestrielle

Taux de croissance des séries désaisonnalisées



Les corrections des variations saisonnières

Persistance à des fréquences saisonnières

Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes

Mise en œuvre dans un cadre SARIMA

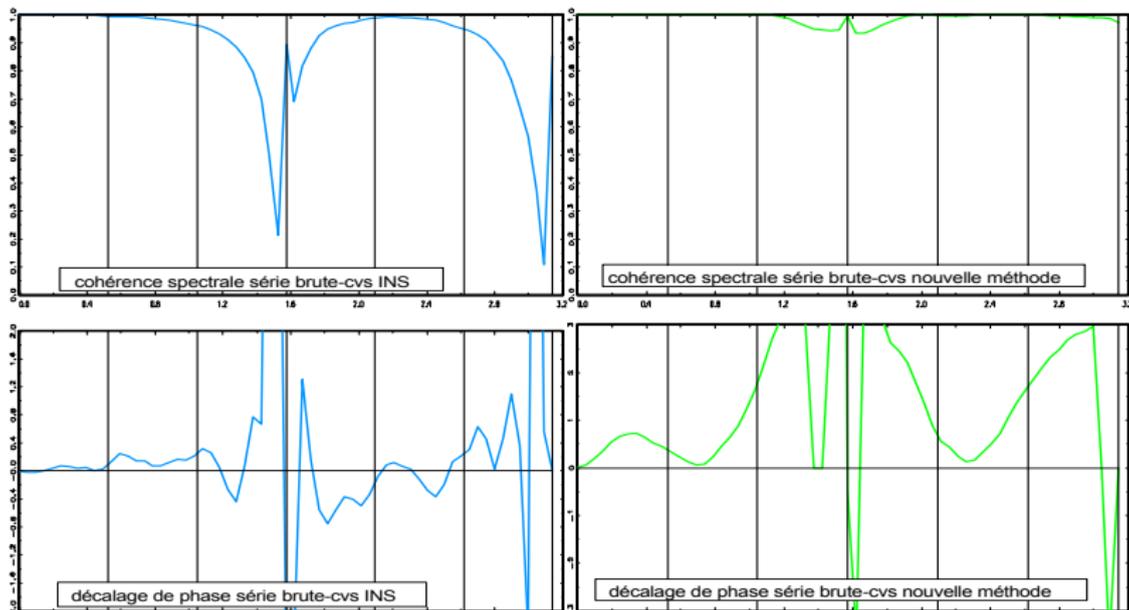
Illustration

Conclusion

Une série mensuelle

Une série trimestrielle

Analyse spectrale



Outline

- 1 Les corrections des variations saisonnières
- 2 Persistence à des fréquences saisonnières
 - Algèbre d'opérateurs d'intégration
 - Décomposition des processus persistants
- 3 Correction des variations saisonnières par soustraction des composantes saisonnières persistantes
 - Exemple : le modèle Airline
 - Processus univarié
- 4 Mise en oeuvre dans un cadre SARIMA
 - Démodulation et composante persistante de long terme
- 5 Illustration
 - Une série mensuelle
 - Une série trimestrielle
- 6 Conclusion

- Méthode dans un cadre linéaire qui vise à éliminer les composantes saisonnières persistantes (stochastiques et déterministes)
- Elle permet une correction jointe de plusieurs séries temporelles
- Elle permet l'usage de méthodes d'estimation robustes (moindre sensibilité aux points aberrants)
- Elle donne un cadre pour construire des filtres asymétriques aux extrémités d'échantillon (dépend du processus de génération des données)
- Elle est construite dans l'espace des temps, elle peut introduire un déphasage et le gain du filtre associé peut être très supérieur à 1

"It has never been denied, and, indeed, is repeatedly emphasized by Rosenblatt in his own work that the effects noted in the frequency domain are significant only to the degree to which these same effects, translated into the behavior of the adjusted series over time, affect the interpretation of the movements of that series". (Grether et Nerlove (1970))